Изучение методов постановки краевых задач для решения уравнения теплопроводности при обработке материалов КПЭ.

Составитель Шишковский Игорь Владимирович

Редактор В.Ф. Елисеева

Технический редактор Г.Н. Шанькова

Подписано в печать 4.12.96.
Формат 60х84 1/16. Бум. типогр. N2.
Печать оперативная.
Усл.п.л. 0,75. Уч.-изд.л. 0,6.
Тираж 20 экз. С. - 161

Самарский государственный технический университет
443010, Самара, ул. Галактионовская 141.

Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
Самарский государственный технический университет

Кафедра общей и лазерной физики

Изучение методов постановки краевых задач для решения уравнения теплопроводности при обработке материалов КПЭ

Методические указания к практической работе

Самара - 2001

Составитель **И.В. Шишковский**

УДК 621.7+621.9

Изучение методов постановки краевых задач для решения уравнения теплопроводности при обработке материалов КПЭ. Метод. указания к практ. работе/ Самар. гос. техн. ун-т; Сост. *И. В. Шишковский*. Самара, 2001, 10 с.

Содержат теоретическую и практическую части. Составлены в соответствии с программой курса " Теоретические основы обработки материалов концентрированными потоками энергии (КПЭ)" с целью закрепления теоретического материала по теме " Методы решения уравнения теплопроводности". Методические указания рассчитаны на студентов специальности 12.07 "Машины и технология высокоэффективных процессов обработки"

Библиогр. 4 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета СамГТУ

4. Анализ полученного решения и выводы.

Контрольные вопросы

1. Сколько начальных и граничных условий для решения уравнения теплопроводности надо поставить и почему? Приведите примеры.
2. Какой смысл имеет объемный член уравнения теплопроводности? Какова его размерность?
3. Что необходимо учитывать при постановке граничных условий на границе сосуществующих фаз?
4. В какой системе координат Вы бы решали тепловую задачу о воздействии на материал ЛИ с Гауссовым профилем?

4. Библиографический список

1. Общая физика/ Под ред. Савельева (термодинамика и оптика) или Сивухина т.2
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики: Учеб. пособие. Изд. 5-е. М., Наука, 1977. 736 с.
3. Сборник задач по математической физике. Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов М. Н. М.: Наука. 1972.
4. Лазерная и эл. лучевая обработка материалов: Справ-к под ред. Рыкалина Н. Н. и др. М.: Машиностроение, 1985. 496 с.

интенсивности I по пятну нагрева в течение некоторого времени t_m. Поставить краевую задачу Коши для описания распределения температуры на стадии нагрева, предполагая, что зона термического влияния много меньше размеров образца. Считать материал однородным, а коэффициент поглощения ЛИ - А.

Задача 2. Поверхность стали У8 подвергается воздействию электронного пучка (ЭП) с Гауссовым распределением интенсивности I по пятну нагрева в течение некоторого времени t_m. Поставить краевую задачу Коши для описания распределения температуры на стадии нагрева, предполагая, что зона термического влияния сравнима с размерами образца *lxhxw*. Считать материал однородным, а коэффициент поглощения ЭП - А.

Задача 3. Поверхность сплава ВТ6 подвергается воздействию ЛИ с Гауссовым распределением интенсивности I по пятну нагрева в течение некоторого времени t_m. При этом была достигнута стадия плавления материала. Поставить краевую задачу Коши для описания распределения температуры во всем материале на стадии нагрева, предполагая, что зона термического влияния много меньше размеров образца. Считать материал однородным, а коэффициент поглощения ЛИ - А.

Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Описание используемого метода решения.
3. Решение задач N 1-3 (по указанию преподавателя).

Цель работы - изучение теоретических и закрепление практических навыков по постановки краевых задач для решения уравнения теплопроводности при обработке материалов концентрированными потоками энергии (КПЭ).

Предполагается, что студенты знакомы с основами высшей математики (в частности методами решения дифференциальных уравнений первого порядка).

1. Уравнения параболического типа. Постановка краевых задач [1,2]

Дифференциальные уравнения с частными производными 2-го порядка наиболее часто встречаются при изучении процессов теплопроводности и диффузии.

Так, изучая процесс распространения тепла в поверхностном слое материала, подвергнутого обработке КПЭ (лазерное излучение или электронный пучок) и используя закона Фурье о том, что тепловой поток равен

$$j(x,t)= - k(x,t)*dT(x,t)/dx, \qquad (1)$$

можно показать, что температура T(x,t) в длинном тонком стержне в пространстве и времени будет изменяться по следующему закону:

$$p*c*dT(x,t)/dt=d(k(x,t)*dT(x,t)*dx)/dx+Q(x,t), \qquad (2)$$

где k-коэффициент теплопроводности [Вт/(см*град)]; с - теплоемкость [Дж/(г*град)]; р - плотность материала [г/см^3]. В уравнении (1) Q называется объемным членом или функцией источников- стоков тепла. Если материал однороден, то k, с, р можно считать постоянными и уравнение записывают в виде

$$\mathbf{dT(x,t)/dt=a*d^2T(x,t)dx)/dx^2+q(x,t), \quad (3)}$$

где a=k/(cp) называют коэффициентом температуропроводности [см^2/с], а второе слагаемое есть **q(x,t)=Q(x,t)/cp**.

Уравнение теплопроводности (3) называется стационарным, если температура не зависит от времени:

$$\mathbf{a*d^2T(x,t)/dx^2+Q(x,t)=0. \qquad (4)}$$

Совершенно аналогично перераспределение концентрации углерода C(x,t) в поверхностном слое материала, например при воздействии КПЭ может быть описано уравнением диффузии:

$$\mathbf{dC(x,t)/dt=D(x,t)*d^2T(x,t)/dx^2+Q(x,t), \qquad (5)}$$

которое, также является дифференциальным уравнением 2-го порядка параболического типа и выводится на основании закона Фика - аналога закона Фурье для процессов массообмена. Q(x,t) в уравнении (5) описывает источники-стоки концентрации вещества

решать задачу Коши соответственно в цилиндрической / сферической системе координат, что также иногда упрощает ее решение.

Другим важным моментом является постановка граничных условий на границе сосуществующих фаз при воздействии КПЭ на материал (например, твердое тело и расплав, низко- и высокотемпературные фазы железа и т.д.). Здесь необходимо учитывать, что фазовый переход первого рода всегда сопровождается выделением-поглощением скрытой теплоты фазового перехода, которая должна быть учтена в граничном условии. Так же должен быть учтен факт движения границы раздела фаз в пространстве:

$$\mathbf{k_1*dT_1(x,t)/dx_{|гр}=k_2*dT_2(x,t)/dx|_{гр}+Q_{ск.т.}*dx|_{гр}/dt.}$$

Здесь k_1,k_2,T_1,T_2 - коэффициенты теплопроводности и температуры, соответственно, в 1 и 2 фазах (уравнение теплопроводности также должно быть записано для каждой фазы отдельно!), $Q_{ск.т.}$ - скрытая теплота фазового перехода (она позлащается при нагреве (знак минус) и выделяется при охлаждении (знак плюс)), $dx|_{гр}/dt$ - скорость движения границы фаз.

2. Задания на самостоятельную проработку

Задача 1. Поверхность стали 45 подвергается воздействию лазерного излучения (ЛИ) с нормальным распределением

$$-k*dT(x,t)/dx|_{гр}=A*I(x,t), \qquad (11)$$

где А - коэффициент поглощения ЛИ поверхностью, а временная и пространственная зависимость I(x,t) конкретизируется в условиях каждой задачи. Так, нормальное распределение I предполагает I = const по пятну нагрева, а Гауссова $I=I_0*\exp(-x^2/r_b^2)$, где I_0 - максимальная интенсивность ЛИ в центре пятна радиусом r_b. Информация об ЭП как объемном тепловом источнике уже должна присутствовать не в граничном условии, а в объемном члене Q уравнения теплопроводности (2-4).

В случае, если размер зоны термического влияния (ЗТВ) при воздействии КПЭ много меньше, чем характерные размеры образца, для которого и ставится задача Коши, то полезным допущением - моделью является предположение о распространении тепла в полу бесконечном теле. При этом получаемое решение имеет простую интегральную форму (см. решение уравнения теплопроводности методом интегральных преобразований). В этом случае при выборе граничного условия (значение температуры на бесконечности) предполагается равным нулю, то есть физически считается, что на бесконечности отсутствуют какие-либо источники или стоки тепла.

Если размер ЗТВ сравним или меньше r_b, то необходимо решать уже двух-, а то и трехмерную тепловую задачу. Наличие какой-либо симметрии (осевая, сферическая) позволяет ставить и

в объеме материала.

Поэтому методы решения уравнения диффузии также совершенно аналогичны методам решения уравнения теплопроводности. В связи с этим в дальнейшем будем рассматривать методы решения параболических уравнений 2-го порядка на примере тепловых задач, учитывая, что все сказанное в равной мере относится и к методам решения уравнения диффузии.

Сделаем следующие замечания. Уравнение теплопроводности в виде (1-4) выводится в предположении бесконечной скорости распространения тепла в материале, что в общем случае, не верно. Так как скорость распространения тепла конечна, то на временах $t< 10^{-8}$-10^{-9} с. уравнение в виде (1-4) перестает работать и следует считать, что процесс распространения тепла описывается уже уравнением гиперболического типа. В частности, такая ситуация реализуется при обработке материалов КПЭ в режиме сверхкоротких (нано-) импульсов. Далее, если мы имеем непрерывную и однородную среду, то закон Фурье о распространении тепла в ней работает. Но на границе сосуществующих сред-фаз материала теплообмен осуществляется уже по закону Ньютона:

$$q(x,t) = b*(T_1(x,t) - T_2(x,t)), \qquad (6)$$

где T_1 и T_2 - температуры соответственно в первой и второй фазах; b - коэффициент теплообмена [Вт/(см^2*град)], а q - тепловой поток через единицу площади поверхности раздела фаз-сред в единицу времени. При b=0 тело адиабатически изолировано, а если b стремится к бесконечности - T1=T2, то есть температура непрерывна при переходе границы раздела фаз.

Для того чтобы получить решение какой-либо тепловой задачи, к уравнению теплопроводности необходимо добавить начальные и граничные условия то есть поставить задачу Коши.

Начальное условие описывает поведение функции температуры T(x,t) в начальный момент времени t=0 и в общем виде может быть записано так:

$$\mathbf{T(x,t=0) = f(x),} \qquad \mathbf{(7)}$$

где f - некоторая функция координат. Например, если температура обрабатываемого КПЭ материала везде одинакова и равна комнатной, то естественно поставить такое начальное условие: T(x,t=0)=20 C.

Следует отметить, что если начальное условие ставится относительно абсолютного 0 К, то получаемое решение тепловой задачи также будет иметь размерность градусов Кельвина.

Наиболее часто встречаются граничные условия следующих видов:

- граничное условие первого рода:
-

$$\mathbf{T(x|_{гр},t)=f_1(t),} \qquad \mathbf{(8)}$$

то есть на границе задана температура, которая изменяется как некоторая функция времени f_1;

-граничное условие второго рода:

$$\mathbf{dT(x_{|гр},t)/dx=f_2(t),} \qquad \mathbf{(9)}$$

то есть на границе задан тепловой поток, который изменяется как некоторая функция времени f_2;

-граничное условие третьего рода:

$$\mathbf{dT(x_{|гр},t)/dx=b^*(f_3(t)-T_0),} \qquad \mathbf{(10)}$$

то есть на границе осуществляется теплообмен по закону Ньютона как некоторой функции времени f_3 с окружающей средой, имеющей температуру T_0.

В общем случае, при решении конкретных задач Коши на разных границах возможны вариации этих 3-х граничных условий. При обработке материалов КПЭ наиболее часто встречаются следующие варианты граничных условий [3,4].

Так, из физических предпосылок, в основном, предполагается, что ЛИ является поверхностным тепловым источником, а ЭП - объемным тепловым источником. Тогда информация о интенсивности лазерного воздействия - I должна присутствовать в граничном условии, например в виде