

**Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
Самарский государственный технический университет**

Кафедра общей и лазерной физики

**Решения уравнения теплопроводности при обработке
материалов КПЭ методом интегральных преобразований
Фурье**

Методические указания к практической работе

Самара - 2001

Составитель **И. В. Шишковский**

УДК 621.7+621.9

Решения уравнения теплопроводности при обработке материалов КПЭ методом интегральных преобразований Фурье. Метод. указания к практ. работе / Самар. гос. техн. ун-т
Сост. *И. В. Шишковский*. Самара, 2001, 11 с.

Содержат теоретическую и практическую части. Составлены в соответствии с программой курса “Теоретические основы обработки материалов концентрированными потоками энергии (КПЭ)” с целью закрепления теоретического материала по теме “Методы решения уравнения теплопроводности”.

Методические указания рассчитаны на студентов специальности 12.07 “Машины и технология высокоэффективных процессов обработки”

Библиогр. 5 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета СамГТУ

Решения уравнения теплопроводности при обработке материалов КПЭ методом интегральных преобразований Фурье

Составитель **Шишковский Игорь Владимирович**

Редактор **В. Ф. Елисеева**

Технический редактор **Г. Н. Шанькова**

Подписано в печать .15.05.97.
Формат 60x84 1/16. Бум.типогр. № 2.
Печать офсетная.
Усл. п. л. 0, 47. Усл. кр.-отт. 0,47. Уч.-изд.л. 0, 45.
Тираж 50 экз. С. - 88

Самарский государственный технический университет 443010,
Самара, ул. Галактионовская 141.

Библиографический список

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики Учеб. пособие. Изд. 5-е. М., Наука, 1977. 736 с.
2. Лыков А. Е. Теория теплопроводности. 2-е изд. М.: Высш. шк., 1967. 600 с.
3. Сборник задач по математической физике. Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов М. Н. М.: Наука.1972.
4. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. /Пер. с англ. М.: Наука. 1964. 487 с.
5. Лазерная и эл. лучевая обработка материалов. Справочник под ред. Рыкалина Н. Н. и др. М.% Машиностроение, 1985. 496 с.

Цель работы - изучение теоретических и закрепление практических навыков по решению уравнения теплопроводности при обработке материалов концентрированными потоками энергии (КПЭ).

Предполагается, что студенты знакомы с основами высшей математики (в частности, с методами решения дифференциальных уравнений первого и второго порядка).

Основы метода интегральных преобразований Фурье

Для технологических задач обработки материалов КПЭ уравнение теплопроводности является наиболее важным, поскольку позволяет по распределению температуры в зоне обработки КПЭ предсказать результат этой обработки а также основные параметры получаемых структур. Уравнение теплопроводности (как и уравнение диффузии легирующих элементов) является дифференциальным уравнением в частных производных 2-го порядка параболического типа. Поэтому для решения таких уравнения необходимо поставить одно начальное и два граничных условия, т.е. решить задачу Коши (см. методические указания “Изучение методов постановки краевых задач для решения уравнения теплопроводности при обработке материалов КПЭ”). После этого тепловая задача считается полностью определенной и можно дифференциальное уравнение 2-го порядка решить до конца и, следовательно, найти функцию $T(x,y,z,t)$ распределения температуры в теле в любой точке пространства и любой момент времени.

Среди известных точных (аналитических) методов решения уравнения теплопроводности метод интегральных преобразований является наиболее известным. При этом в задачах лазерной и электронно-лучевой обработки материалов нашли применение методы интегральных преобразований Лапласа, Фурье, Ханкеля, Бесселя и т.д. В зависимости от того, решается ли тепловая задача для конечного куска тела или размеры зоны обработки много меньше реальных размеров тела (полу бесконечная или бесконечная постановка задачи Коши), соответственно, интегральное преобразование может быть выражено в виде

конечного ряда либо в виде интеграла. Изложим ниже основы метода интегральных преобразований на примере интегрального преобразования Фурье по одной координате, поскольку во многих случаях тепловая задача может быть сведена к такому виду.

Пусть у нас имеется некоторая непрерывная и дифференцируемая функция $f(x)$, определенная на интервале $-\infty < x < \infty$. В теории интегральных преобразований показывается [1, 2] что для такой функции существует ее образ, который может быть записан в виде

$$f(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) * \exp(-i\lambda\xi) d\xi, \quad (1)$$

где $\exp(-i\lambda\xi)$ - называется ядром интегрального преобразования Фурье на заданном интервале. При этом уравнение (1) считается прямым интегральным преобразованием. Функция $f(x)$ может быть восстановлена по своему образу по формуле

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) * \exp(i\lambda x) dx, \quad (2)$$

Уравнение (2) считается обратным интегральным преобразованием Фурье. Аналогично приведенному выше на полупрямой $0 < x < \infty$ может быть определено \sin - или \cos - преобразование Фурье, например для \sin - преобразования будет так:

$$f(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} * \int_0^{\infty} f(x) * \sin(\lambda x) dx, \quad (3)$$

$$f(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} * \int_0^{\infty} f(x) * \cos(\lambda x) dx, \quad (4)$$

Известны преобразования Фурье и с другими ядрами.

Таким образом, суть метода интегрального преобразования Фурье при решении уравнения теплопроводности, в том числе, сводится к следующей последовательности операций. Если необходимо найти распределение температуры по координате x в любой момент времени - $T(x, t)$, то на правую и левую части уравнения теплопроводности (как в прочем и на поставленные заранее при решении задачи Коши начальное и граничные условия!) воздействуют (т.е. помножают) ядром интегрального

Задача 3. На поверхность стали нанесен слой графита с концентрацией C . Поверхность подвергается воздействию ЛИ в течение некоторого времени t в результате которого происходит перераспределение углерода с поверхности вглубь материала. Найти распределения углерода по глубине к моменту окончания лазерного импульса, считая матрицу чистым ферритом и предполагая, что зона термического влияния много меньше размеров образца.

Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Выбор используемого интегрального преобразования и его обоснование.
3. Решение задач № 1-3 (по указанию преподавателя).
4. Анализ полученного решения и выводы.

Контрольные вопросы

1. Какое ядро интегрального преобразования Фурье предпочтительней использовать при решении тепловых задач для воздействия КПЭ с поверхности материала и почему? Приведите примеры.
2. В чем смысл использования метода интегральных преобразований?
3. Как изменится решение тепловой задачи в разделе 2 если импульс ЛИ будет иметь треугольную форму?
4. Где используются начальные и граничные условия тепловой задачи в методе интегральных преобразований Фурье?
5. Следует ли использовать интегральные преобразования на граничные и начальные условия уравнения теплопроводности?

$$\int_0^{\infty} \cos(\beta\delta) * \exp(-\alpha^2\delta^2) d\delta = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} * \exp(-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}). \quad (15)$$

Окончательное общее решение тепловой задачи (5-7) будет

$$T(x, t) = \sqrt{\frac{a}{\pi}} * \frac{AI_0}{\lambda_{\tau}} \int_0^{t_{им}} \phi(\tau) \frac{\exp(-x^2 / 4a(t_{им} - \tau))}{\sqrt{t_{им} - \tau}} d\tau \quad (16)$$

Если уточнить вид функции источника лазерного излучения в (6) решение (16) можно конкретизировать. Например, если предположить, что $\phi(\tau) = 1$, т.е. источник нормально распределенный, то интеграл в (16) берется явно. Действительно заменой

$$\mu = x^2 / 4a, z = \frac{1}{\sqrt{t_{им} - \tau}},$$

уравнение (16) сводится к известному интегралу

$$\sqrt{\frac{a}{\pi}} * \frac{2AI_0}{\lambda_{\tau}} \int_{\sqrt{t_{им}}}^{\infty} \phi(\tau) \frac{\exp(-\mu z^2)}{z^2} dz = \sqrt{\frac{a}{\pi}} * \frac{2AI_0}{\lambda_{\tau}} * \text{ierfc}\left(\frac{x^2}{4at_{им}}\right) \quad (17)$$

Решение (17) полностью совпадает с известной формулой для расчета температуры при импульсном лазерном воздействии [5].

Задания на самостоятельную проработку

Задача 1. Поверхность стали подвергалась импульсному воздействию лазерного излучения с нормальным распределением интенсивности I по пятну нагрева в течение некоторого времени t (см. условия задачи из раздела 2). Найти распределение температуры в глубь материала на стадии охлаждения, предполагая, что зона термического влияния много меньше размеров образца. Считать материал однородным, а коэффициент поглощения ЛИ - A .

Задача 2. Поверхность стали подвергается воздействию электронного пучка (ЭП) с нормальным распределением интенсивности I по пятну нагрева в течение некоторого времени t . Найти распределение температуры на стадии нагрева ЭП, предполагая, что зона термического влияния много больше размеров образца. Считать материал однородным, а коэффициент поглощения ЭП - A .

преобразования и берут от каждой из частей соответствующий интеграл. Тип интегрального преобразования выбирается в каждом отдельном случае в зависимости от конкретной постановки тепловой задачи. Тогда от уравнения теплопроводности мы переходим к образу уравнения теплопроводности, с которым оказывается в большинстве случаев возможно совершить ряд преобразований, которые значительно упрощают его вид. В частности, понижается степень уравнения, которое становится уже дифференциальным уравнением первого порядка. Решение таких уравнение обычно известно. После того, как найден общий вид решения уравнения теплопроводности в образах Фурье, используются начальные и граничные условия (с которыми проводится аналогичная процедура) для нахождения уже точного решения поставленной тепловой задачи в образах Фурье. Последней стадией метода очевидно является совершение обратного перехода от образа точного решения к самому точному решению. Эта процедура осуществляется воздействием на образ точного решения обратного интегрального преобразования с последующими упрощениями.

Пример решения уравнения теплопроводности методом интегрального преобразования Фурье [3,4]

Пусть поверхность стали подвергается некоторое время $t_{им}$ воздействию импульса лазерного излучения с коэффициентом поглощения A и плотностью мощности лазерного воздействия $I(t)$, которое в общем случае может быть функцией времени. При этом теплофизические характеристики материала предполагаются не зависящими от температуры. Будем считать также что зона лазерного влияния во много раз меньше характерных размеров образца, т.е. возможно для решения воспользоваться методом интегрального преобразования Фурье. Направим ось x вглубь обрабатываемого материала, считая начало координат на поверхности образца. Тогда задача Коши уравнения теплопроводности предстанет в таком виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a * \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, 0 \leq x < \infty, 0 \leq t \leq t_{им}; \quad (5)$$

$$-\lambda * \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = A * I_0 \phi(t); \quad (6)$$

$$T(x, t = 0) = T(x \Rightarrow \infty, t) = 0. \quad (7)$$

Применим cos- интегральное преобразование Фурье поскольку нам задана тепловая задача для полу бесконечного тела. Будем действовать по схеме, подробно описанной в разделе 2.

Умножаем правую и левую части уравнения (5) на ядро и от каждой части берем интеграл

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos(\lambda \xi) d\xi * \frac{\partial T}{\partial t} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos(\lambda \xi) d\xi * a * \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (8)$$

Преобразуем теперь каждую часть (8). Так в левой части уравнения (8) интегрирование осуществляется по пространственной координате, следовательно, знак дифференцирования может быть вынесен за интеграл, тогда выражение в квадратных скобках может быть записано проще (см. уравнение (3)):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} T(\xi, t) * \cos(\lambda \xi) d\xi \right] = \frac{\partial}{\partial t} T(\lambda, t) \quad (9)$$

В правой части (8) можно сделать более существенные преобразования. Например, проинтегрируем этот интеграл по частям по известной формуле: $\int u * dv = u * v - \int v * du$. Обозначим $u = \cos(\lambda \xi)$ и $dv = dT/d\xi^2$ тогда $du = -\sin(\lambda \xi)$, $v = dT/d\xi$, а интеграл преобразуется так:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \cos(\lambda \xi) d\xi * a * \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} a * \left[\frac{\partial T(\xi, t)}{\partial \xi} * \cos(\lambda \xi) \Big|_0^{\infty} + \lambda \int_0^{\infty} \frac{\partial T(\xi, t)}{\partial \xi} * \sin(\lambda \xi) d\xi \right] \quad (10)$$

Проанализируем выражение в скобках и посмотрим, как ведет себя первый функционал на пределах интегрирования. В частности, в нуле косинус равен единице, а на бесконечности температура $T(x \rightarrow \infty, t) = 0$ в соответствии с граничным условием (7). По граничному условию (6) градиент температуры в нуле равен плотности мощности лазерного излучения. Тогда правая часть (8) равна (11). Проинтегрируем это выражение еще раз по частям,

обозначив снова $u = \sin(\lambda \xi)$ и $dv = dT/d\xi$ тогда $du = \lambda * \cos(\lambda \xi)$, $v = T(\xi, t)$. Получим

$$\begin{aligned} & -\sqrt{\frac{2}{\pi}} * \frac{AI_0}{\lambda_T} a \phi(t) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} a \lambda \int_0^{\infty} \sin(\lambda \xi) d\xi * \frac{\partial T}{\partial \xi} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} * \frac{AI_0}{\lambda_T} a \phi(t) + \\ & + \sqrt{\frac{2}{\pi}} a \lambda * \left[T(\xi, t) * \sin(\lambda \xi) \Big|_0^{\infty} - \lambda \int_0^{\infty} T(\xi, t) * \cos(\lambda \xi) d\xi \right] = \\ & = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} * \frac{AI_0}{\lambda_T} a \phi(t) - a \lambda^2 * T(\lambda, t). \end{aligned} \quad 11$$

Анализируя взятый по частям интеграл, снова обнаружим, что в квадратной скобке первый член равен нулю (т.к. $T(x \rightarrow \infty, t) = 0$ а $\sin(0) = 0$) и останется только последний функционал, вид которого можно упростить, используя (3). Таким образом, уравнение теплопроводности (8) после прямого интегрального преобразования значительно упростилось

$$\frac{\partial}{\partial t} T(\lambda, t) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} * \frac{AI_0}{\lambda_T} a \phi(t) - a \lambda^2 * T(\lambda, t), \quad (12)$$

Т.е. в образах преобразования Фурье - $T(\lambda, t)$ из дифференциального уравнения второго порядка оно превратилось в диф. уравнение первого порядка, решение которого известно [1-3].

$$T(\lambda, t) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} * \frac{AI_0}{\lambda_T} a \int_0^{t_{\text{им}}} \exp(-a \lambda^2 (t - \tau)) * \phi(\tau) d\tau, \quad (13)$$

Теперь воспользуемся начальным условием (7) для нахождения полного решения. В нашем случае решение (13) от этого существенно не изменится. Явное решение тепловой задачи найдем, применив обратное преобразование Фурье (4)

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} T(\lambda, t) * \cos(\lambda x) d\lambda = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} * \frac{AI_0}{\lambda_T} * \\ & * \int_0^{\infty} \cos(\lambda x) d\lambda \int_0^{t_{\text{им}}} \exp(-a \lambda^2 (t - \tau)) * \phi(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (14)$$

Выражение (14) можно упростить, взяв интеграл по λ , для этого воспользуемся известной формулой