

Андреева Елена Анатольевна

**СТРУКТУРНО-ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ
РЕОЛОГИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ
РАЗУПРОЧНЯЮЩИХСЯ И НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ
МАТЕРИАЛОВ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ**

01.02.04 — Механика деформируемого твердого тела

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Работа выполнена в Государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования "Самарский государственный технический университет".

Научный руководитель:

доктор физико–математических наук, профессор
Радченко Владимир Павлович.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Вильдеман Валерий Эрвинович,

доктор физико-математических наук, профессор
Хромов Александр Игоревич
заведующий кафедрой «Прочность летательных аппаратов» Самарского государственного аэрокосмического университета.

Ведущая организация:

Институт машиноведения УрО РАН, г. Екатеринбург.

Защита состоится « » года в часов минут на заседании диссертационного совета Д 004.012.01 при Институте механики сплошных сред по адресу: 614013, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1, www.icmm.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института механики сплошных сред УрО РАН.

Автореферат разослан

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор технических наук

Березин И.К.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Многие промышленные и природные поликристаллические материалы даже малого объема с точки зрения механики микронеоднородных сред представляют сложную статически неопределимую систему случайно ориентированных кристаллических зерен и тех частиц, из которых они состоят. Очевидно, что закономерности микронеоднородного деформирования влияют на процессы зарождения и развития неупругой деформации, континуальное разрушение и разупрочнение материалов. Отразить основные особенности деформационного поведения и континуального разрушения могут только феноменологические модели, базирующиеся на известных физико-механических представлениях о строении твердых тел и процессах, протекающих в них при деформациях. Однако эти процессы настолько сложны и многообразны, что описать их одновременно с позиции дискретной математики пока не представляется возможным. С другой стороны, феноменологические макромодели неупругого реологического деформирования механики сплошной среды принципиально не могут описать целый класс экспериментально наблюдаемых эффектов, которые связывают с возникновением и изменением полей микронапряжений. Поэтому существует несколько уровней рассмотрения, по-разному детализирующих материал, позволяющих перейти от микро– к макросвойствам.

По этим причинам для более адекватного отражения процессов неупругого деформирования наряду с феноменологическими макротеориями параллельно развиваются теории, базирующиеся на учете микронеоднородности развития необратимых деформаций и основанные на структурных математических моделях, в основе которых лежит моделирование неоднородностей материала конструкционной неоднородностью. Это, с одной стороны, дает представление о том, каким образом формируются макроскопические характеристики материала и позволяет более обоснованно выбрать подходящий вариант феноменологической теории в виде интегрального или дифференциального оператора, связывающего тензоры деформаций и напряжений, внутренние структурные параметры и время, а также, оптимальным образом спланировать определяющий эксперимент для идентификации параметров оператора. С другой стороны, структурные модели с минимально возможным числом параметров можно использовать вместо физических уравнений состояния при решении краевых задач для сред со сложными реологическими свойствами, для которых затруднительно построить феноменологическую модель.

Вышеизложенное определяет актуальность диссертационного исследования и позволяет сформулировать цель настоящей работы.

Целью работы является разработка структурно-феноменологической модели разупрочняющихся и нелинейно-упругих материалов, исследование на ее основе процессов неупругого реологического деформирования и разрушения в условиях одноосного и сложного напряженных состояний и применение модели к решению одномерных краевых задач.

Задачи исследования. Для достижения указанной цели необходимо решить

следующие задачи:

– разработка структурно-феноменологической модели неупругого реологического деформирования и разрушения разупрочняющихся металлических материалов и исследования на ее основе особенностей деформирования на закритической стадии в условиях одноосного и сложного напряженных состояний;

– исследование эффекта Баушингера на стадии разупрочнения и зависимости диаграмм деформирования от скорости нагружения в условиях ползучести;

– разработка метода решения одномерных краевых задач для разупрочняющегося материала на основании структурной модели;

– разработка структурно-феноменологической модели ползучести нелинейно-упругого материала при сложном напряженном состоянии и исследование на ее основе эффекта влияния ползучести на упругую деформацию;

– всесторонняя проверка адекватности разработанных структурных моделей экспериментальным данным.

Научная новизна. К новым результатам проведенных исследований относятся:

1) структурно-феноменологическая модель неупругого реологического деформирования разупрочняющихся металлических материалов и исследование на ее основе эффекта Баушингера на стадии разупрочнения и зависимости диаграмм деформирования от скорости нагружения в условиях ползучести;

2) метод решения одномерных краевых задач для разупрочняющегося материала на основании структурной модели;

3) методы расчета макро- и микронапряженных предельных состояний по структурной модели для разупрочняющихся и разрушающихся сред вследствие деформаций пластичности и ползучести в условиях сложного напряженного состояния;

4) структурно-феноменологическая модель ползучести нелинейно-упругого материала при сложном напряженном состоянии;

5) эффект влияния ползучести на упругую деформацию, заключающийся в том, что происходит не только изменение модуля вектора нелинейно-упругих деформаций в пространстве деформаций вследствие ползучести при постоянном тензоре напряжений, но и его поворот, при этом компоненты нелинейно-упругой деформации проявляют одновременно свойства механической памяти и вязкоупругости.

Практическая значимость работы заключается в разработке структурно-феноменологических моделей для разупрочняющихся вследствие пластичности и ползучести металлических материалов и нелинейно-упругих материалов, позволяющих описать ряд новых эффектов (немонотонный характер зависимостей пределов текучести на сжатие после предварительного растяжения на стадии пластического разупрочнения, неклассические эффекты влияния скорости нагружения на диаграмму деформирования в условиях ползучести, влияние деформации ползучести на нелинейно-упругую деформацию, свойство механической памяти и вязкоупругости для нелинейно-упругой деформации в условиях ползучести, неаддитивность нелинейно-упругой деформации и деформации ползучести и другие) и решать краевые задачи на основе структурных моделей, не прибегая к физическим урав-

нениям состояния. Это позволяет, с одной стороны, качественно и количественно понять причины процесса разрушения материала на микроуровне в условиях закритического деформирования, а, с другой стороны, позволяет научно-обоснованно строить феноменологические теории неупругого реологического деформирования и разрушения и оптимально планировать определяющий эксперимент для идентификации параметров.

Обоснованность выносимых на защиту научных положений, выводов и рекомендаций, а также достоверность полученных результатов исследования подтверждается: адекватностью имеющихся модельных математических представлений реальному физико-механическому поведению исследуемых материалов; корректностью использования математического аппарата и законов механики деформируемого твердого тела; сопоставлением расчетных данных по предложенным моделям экспериментальными данными и данным феноменологических теорий других авторов.

На защиту выносятся:

1) структурно-феноменологическая модель неупругого реологического деформирования разупрочняющихся металлических материалов;

2) новые решения прикладных одномерных краевых задач для разупрочняющегося материала на основании структурной модели;

3) методики и алгоритмы расчета макро- и микронапряженных предельных состояний по структурной модели для разупрочняющихся и разрушающихся сред вследствие деформаций пластичности и ползучести в условиях сложного напряженного состояния;

4) структурно-феноменологическая модель ползучести нелинейно-упругого материала при сложном напряженном состоянии и доказательство на ее основе влияния деформации ползучести на упругую деформацию;

5) методики и алгоритмы для описания новых эффектов, таких как немонотонный характер зависимости пределов текучести на сжатие после предварительного растяжения на стадии пластического разупрочнения, неклассические эффекты влияния скорости нагружения на диаграмму деформирования в условиях ползучести, влияние деформации ползучести на нелинейно-упругую деформацию, свойство механической памяти и вязкоупругости для нелинейно-упругой деформации в условиях ползучести, неаддитивность нелинейно-упругой деформации и деформации ползучести; "гистерезисные" явления для нелинейно-упругой деформации вследствие деформации ползучести и других.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка источников из 241 наименования. Работа содержит 174 страницы основного текста, 20 страниц приложений, 64 рисунка и 6 таблиц.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на Второй Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи» (г. Самара, 2005), на Третьей Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи» (г. Самара, 2006), на Всероссийской научной конференции «Математика. Механика. Информатика» (г. Челябинск, 2006), на XVI Международной конференции «Физика прочности и пластичности

материалов» (г. Самара, 2006), на IV Всероссийском научном семинаре, посвященном памяти С.Д. Волкова (УрОРАН, г. Екатеринбург, 2006), в Зимней школе по механике сплошных сред (пятнадцатая) (г. Пермь, 2007), на Международной конференции "XVIII сессия Международной школы по моделям механики сплошной среды" (г. Саратов, 2007), на Пятой Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (г. Самара, 2008), на V Всероссийской конференции «Механика микронеоднородных материалов и разрушение» (г. Екатеринбург, 2008), на 4-м Международном форуме (9-ой международной конференции молодых ученых) «Актуальные проблемы современной науки» (г. Самара, 2008), на XVII Международной конференции: «Физика прочности и пластичности материалов» (г. Самара, 2009), на IV Российской научно-технической конференции «Ресурс и диагностика материалов и конструкций» (г. Екатеринбург, 2009), на VII Международной конференции «Математическое моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов» (г. Ульяновск, 2009), на Шестой Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (г. Самара, 2009), на научном семинаре «Механика и прикладная математика» Самарского государственного технического университета (рук. профессор В.П. Радченко, 2007, 2008, 2009 г.г.), на научном семинаре Института механики сплошных сред УрО РАН (рук. академик РАН Матвиенко В.П., 2009).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 19 работ, список которых приведен в конце автореферата.

Работа выполнялась в рамках тематического плана НИР СамГТУ (тема «Разработка методов математического моделирования динамики и деградации процессов в механике сплошных сред, технических, экономических, биологических и социальных системах и методов решения неклассических краевых задач и их приложений»).

Благодарности. Автор выражает благодарность научному руководителю профессору, доктору физико-математических наук В.П. Радченко за постановки задач и постоянное внимание к работе.

Личный вклад автора. Автору во всех работах, опубликованных в соавторстве, в равной степени принадлежат как постановки задач, так и результаты выполненных исследований.

Краткое содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, определяются цели исследования, излагаются научная новизна и практическая значимость работы, формулируются основные положения, выносимые на защиту, приводится структура диссертационной работы, а также сведения об апробации работы и публикациях.

Глава 1. Аналитический обзор и постановка задачи.

В **главе 1** дан краткий обзор литературы по научным проблемам, близким к теме диссертационной работы. Анализируются основные подходы при построении

физических определяющих соотношений неупругого реологического деформирования на макро– и микроуровне. Отмечается, что традиционная схема расчета напряженно-деформированного состояния элементов конструкций начинается со специальным образом организованного эксперимента над материалом, информация из которого является основой для построения феноменологических теорий неупругого реологического деформирования и разрушения, при этом реальная структура металла совершенно не принимается во внимание. Вопросы неупругого деформирования, накопления поврежденности при ползучести и разрушения с этих позиций рассматривались многими отечественными и зарубежными учеными, такими как: Арутюнян Н.Х., Аршакуни А.П., Астафьев В.И., Болотин В.В., Бугаков И.И., Вакуленко А.А., Голуб В.П., Гольденблат И.И., Горев Б.В., Еремин Ю.А., Ильющин А.А., Качанов Л.М., Кеннеди А.Дж., Кисилевский В.Н., Клебанов Я.М., Ковпак В.И., Лепин Г.Ф., Локощенко А.М., Малинин М.М., Макутов Н.А., Милейко С.Т., Наместников В.С., Никитенко А.Ф., Одинг И.А., Победря Б.Е., Работнов Ю.Н., Радаев Ю.Н., Радченко В.П., Самарин Ю.П., Соснин О.В., Суворова Ю.В., Трунин И.И., Хажинский Г.М., Цвелодуб И.Ю., Чижик А.А., Чудновский А.И., Шевченко Ю.Н., Шестериков С.А., Besseling J.F., Garofalo F., Johnson A.E., Leskie F.A., Odqvist F. K. G., Sim R.G. и многие другие.

Однако, феноменологические макромоделли неупругого реологического деформирования не могут описать целый класс экспериментально наблюдаемых эффектов, в том числе и на стадии разупрочнения материала, которые связываются с возникновением и изменением полей микронапряжений. Поэтому наряду с феноменологическими теориями, устанавливающими связь между макроскопическими свойствами материала, возникает необходимость рассматривать микромеханизмы деформирования и разрушения материала с целью более полного описания его поведения.

Основное внимание уделяется структурным математическим моделям среды, моделирующим микронеоднородности конструкционной неоднородностью. Отмечается, что проблема моделирования упругопластической деформации микронеоднородных поликристаллических материалов при помощи структурных моделей различного вида рассматривалась в работах Волоховской О.А., Косарчука В.В., Мельникова С.А., Небогиной Е.В., Павлова П.А., Пановко С.Я., Панферовой Е.В., Петрова М.Г., Понькина А.В., Радченко В.П., Ревуженко А.Ф., Савченкова Ю.Е., Стружанова В.В., Brunig M., Cailletand G., Cheng P.S., Chiang D.Y., Liang N.G., а вопросы разрушения при упругопластическом деформировании, например, в работах Вильдемана В.Э., Мошева В.В., Небогиной Е.В., Радченко В.П., Соколкина Ю.В., Стружанова В.В., Ташкинова А.А. и других. Вопросам моделирования деформации ползучести на основании структурных моделей посвящены работы Апайчева М.В., Гохфельда Д.А., Дударева Е.Ф., Кадашевича Ю.И., Мадудина В.Н., Небогиной Е.В., Новожилова В.В., Пейсахова А.М., Почивалова Г.П., Радченко В.П., Садакова О.С., Batsoulas N.D., Kermanidls T.B., Pantelakis S.G., Wilshire B., а разрушения при ползучести – работы Асташкина В.И., Ефимова А.Л., Новожилова В.В., Кадашевича Ю.И., Падуцана В.А., Садакова О.С., Слюсарчука Ю.Н., Ivanov V.N., Xu Y.-P., Needleman A. и других.

Выделены работы по острой и актуальной проблеме моделирования так называемой закритической стадии упругопластического деформирования, инициированные идеями Волкова С.Д. и развиваемые в научной школе Лебедева А.А., в работах Вильдемана В.Э., Радченко В.П., Стружанова В.В. и других.

Сфокусировано внимание на проблеме построения моделей ползучести нелинейно-упругих материалов, для которых наблюдается дрейф мгновенно-упругой деформации вследствие деформации ползучести, отмеченный впервые в ряде работ Самарина Ю.П. и Радченко В.П. Систематическое исследование этого эффекта на основании простейшей структурной модели типа обобщенной модели Максвелла для одноосного растяжения выполнено в работах В.П. Радченко и Д.В. Шапиевского. Отмечено, что модели такого типа для сложного напряженного состояния пока не разработаны. По результатам литературных данных сформулированы основные задачи диссертационной работы.

Глава 2. Решение одномерных задач неупругого деформирования для разупрочняющихся материалов на основании структурной модели.

В пункте 2.1 сформулированы цели и постановки задач главы 2.

В пункте 2.2 рассматривается структурная модель, согласно которой поликристаллический материал моделируется системой хаотически ориентированных однородных стержней (локальных элементов структурной модели) одинаковой длины, работающих на растяжение – сжатие.

Каждый локальный элемент этой системы (стержень) наделяется простейшими деформационными свойствами: линейной упругостью, идеальной пластичностью и нелинейной вязкостью. В таком случае деформацию i – того локального элемента можно представить в виде:

$$\varepsilon_i = e_i + e_i^p + p_i, \tag{1}$$

где $e_i = \sigma_i / E_M$ – упругая микродеформация, E_M – микромодуль Юнга, микропластическая деформация e^p удовлетворяет закону идеальной пластичности с микропределом текучести σ_{TM} , p_i – микродеформация ползучести, причем

$$\dot{p}_i = \psi(\sigma_i) = a |\sigma_i|^{n-1} \sigma_i, \tag{2}$$

a, n – микроконстанты материала.

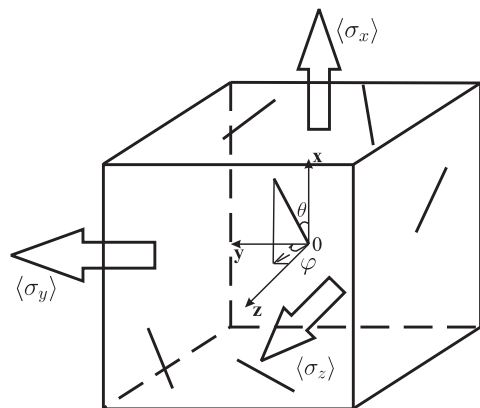


Рис. 1. Схематическое изображение структурной модели в точке

Рассмотрим материал, на который действует тензор напряжений, приведенный к главным осям $OXYZ$ (рис. 1). Ориентация элементарных стержней (локальных элементов) задается двумя сферическими углами θ и φ ($0 \leq \theta \leq \pi/2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$); $\varepsilon(\theta, \varphi)$ – микродеформация локального элемента; $\sigma(\theta, \varphi)$ – микронапряжения в локальных элементах (стержнях), $\langle \sigma_x \rangle$, $\langle \sigma_y \rangle$, $\langle \sigma_z \rangle$ – макронапряжения (главные напряжения); $\langle \varepsilon_x \rangle$, $\langle \varepsilon_y \rangle$, $\langle \varepsilon_z \rangle$ – макродеформации (главные деформации).

Уравнения равновесия для структурной модели имеют вид:

$$\begin{aligned}
\langle \sigma_x \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \sigma(\theta, \varphi) d\varphi, \\
\langle \sigma_y \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \sigma(\theta, \varphi) \cos^2 \varphi d\varphi, \\
\langle \sigma_z \rangle &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \sigma(\theta, \varphi) \sin^2 \varphi d\varphi,
\end{aligned} \tag{3}$$

а уравнения совместности деформации для локальных элементов записываются так:

$$\varepsilon(\theta, \varphi) = \langle \varepsilon_x \rangle \cos^2 \theta + \langle \varepsilon_y \rangle \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \langle \varepsilon_z \rangle \sin^2 \theta \sin^2 \varphi. \tag{4}$$

Для установления связи между микро- и макродеформациями используется гипотеза однородности деформации по объему:

$$\langle \varepsilon_x \rangle = \varepsilon(0, \varphi), \quad \langle \varepsilon_y \rangle = \varepsilon\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad \langle \varepsilon_z \rangle = \varepsilon\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right). \tag{5}$$

Для описания процесса разрушения в материале необходимо ввести критерий разрушения локального элемента структурной модели вследствие микродеформаций пластичности и ползучести. В настоящей работе вводится гипотеза вязкого разрушения, базирующаяся на энергетическом подходе накопления поврежденности в локальном элементе. В качестве меры поврежденности используется величина

$$\Omega(\theta, \varphi, t) = \frac{A_1(\theta, \varphi, t)}{A_1^*} + \frac{A_2(\theta, \varphi, t)}{A_2^*}, \tag{6}$$

где $A_1(\theta, \varphi, t) = \int_0^t \sigma(\theta, \varphi, \xi) d\xi$ – текущая величина работы микронапряжений на микродеформации пластичности; A_1^* – микроконстанта материала (критическая величина работы микронапряжений в локальном элементе на микродеформации пластичности); $A_2(\theta, \varphi, t) = \int_0^t \sigma(\theta, \varphi, \xi) \dot{p}(\theta, \varphi, \xi) d\xi$ – текущая величина работы микронапряжений на микродеформации ползучести; A_2^* – микроконстанта материала (критическая величина работы микронапряжений в локальном элементе на микродеформации ползучести). Величины углов θ и φ играют роль параметров. Предполагается, что если $\Omega(\theta, \varphi, t) < 1$, то локальный элемент находится в неразрушенном состоянии. Время разрушения $t = t^*$ элемента определяется из условия $\Omega(\theta, \varphi, t^*) = 1$. Разрушение элемента макрообъема материала происходит в результате разрушения всех локальных элементов. Приводится методика идентификации параметров по структурной модели $E_M, \sigma_{TM}, a, n, A_1^*, A_2^*$ по экспериментальным данным. В качестве определяющего эксперимента необходимо

иметь диаграмму упругопластического деформирования до временного предела сопротивления (ниспадающий участок прогнозируется по модели расчетным путем) и участка установившейся ползучести в одноосном случае при нескольких напряжениях до границы с третьей стадией, которая прогнозируется также расчетным путем.

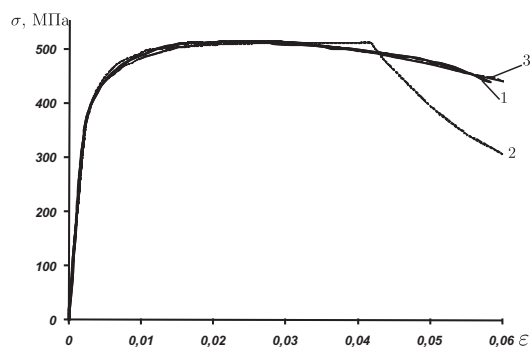


Рис. 2. Расчетные и экспериментальная диаграммы деформирования для сплава ЭИ 617 ($T=900$ °C): 1 — экспериментальная диаграмма, 2 — расчет по структурной модели, 3 — расчет по феноменологической модели (7)

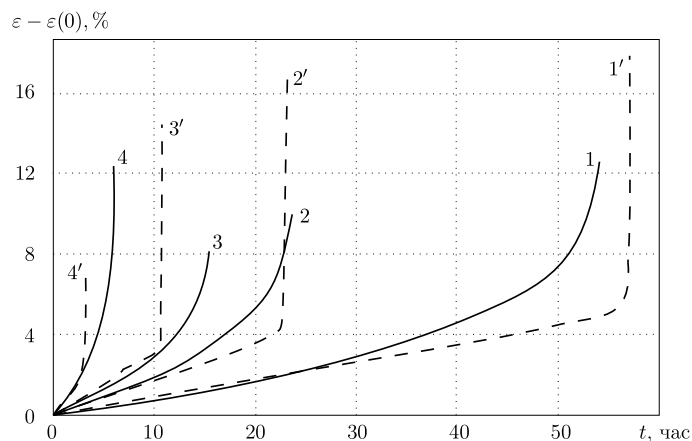


Рис. 4. Экспериментальные (сплошные) и расчетные (пунктирные) линии диаграмм материала 12X18H10T при $T=850$ °C в условиях одноосного напряженного состояния: 1 — $\langle \sigma_x \rangle = 39.24$ МПа, 2 — $\langle \sigma_x \rangle = 49.05$ МПа, 3 — $\langle \sigma_x \rangle = 58.86$ МПа, 4 — $\langle \sigma_x \rangle = 78.48$ МПа

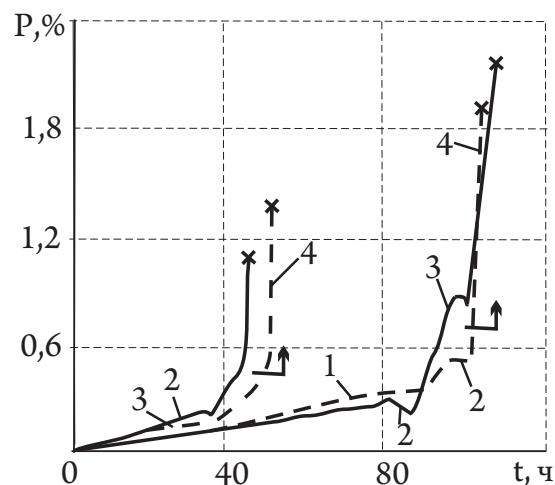


Рис. 3. Экспериментальные (сплошные линии) и расчетные (штриховые линии) кривые ползучести сплава ЭИ 698 при $T=750$ °C при переменных режимах нагружения: 1 — $\langle \sigma_x \rangle = 373$; 2 — $\langle \sigma_x \rangle = 0$; 3 — $\langle \sigma_x \rangle = 421$; 4 — $\langle \sigma_x \rangle = 470,9$ МПа; x — разрушение

В самом общем случае в процессе упругопластического деформирования на участке упрочнения материала имеются зоны, в которых локальные элементы находятся в упругом состоянии, пластически растянуты и пластически сжаты, а на стадии разупрочнения (в режиме "жесткого" нагружения) к ним добавляются зоны разрушения в областях пластически растянутых и сжатых локальных элементов. Аналогичная картина наблюдается и при ползучести.

В качестве примера на рис. 2—4 приведены результаты расчета диаграммы упругопластического деформирования и кривых ползучести при одноосном растяжении по структурной модели и экспериментальные данные для нескольких материалов.

В пункте 2.3 выполнено моделирование и анализ процесса рассеянного накопления поврежденности на стадии пластического разупрочнения по структурной модели и по феноменологическому варианту эндохронной теории пластичности для разупрочняющегося материала, предложенному Самариним Ю.П. и Радченко В.П., который в одноосном случае имеет вид:

$$\varepsilon = e + e^p;$$

$$\dot{e}^p = \begin{cases} 0, & \sigma(t) \leq \sigma_{\text{пр}}; \\ \lambda [a (\sigma(t) - \sigma_{\text{пр}})^{n_1} - e^p(t)], & a (\sigma(t) - \sigma_{\text{пр}})^{n_1} > e^p(t), \\ 0, & a (\sigma(t) - \sigma_{\text{пр}})^{n_1} \leq e^p(t), \sigma(t) > \sigma_{\text{пр}}; \end{cases} \quad (7)$$

$$\sigma = \sigma_0(1 + \omega);$$

$$\dot{\omega} = \gamma \sigma \dot{e}^p,$$

где ε , e и e^p — полная деформация, упругая и пластическая деформации (соответственно), $\sigma_{\text{пр}}$ — предел пропорциональности (текучести); ω — параметр поврежденности; σ и σ_0 — истинное и номинальное напряжения; λ , a , n_1 , γ — параметры модели. На рис. 2 приведен расчет и по модели (7).

Показана связь параметра поврежденности ω_1 в концепции Работнова-Качанова при одноосном растяжении, когда истинные и номинальные напряжения связаны соотношением $\sigma = \sigma_0/(1 - \omega_1)$, с относительной величиной разрушившихся локальных элементов в процессе пластического деформирования на закритической стадии.

В пункте 2.4 проанализированы тонкие эффекты влияния скорости нагружения $\langle \dot{\varepsilon}_x \rangle$ на полную диаграмму упругопластического деформирования (включая закритический участок) для схемы "жесткого" нагружения в условиях ползучести, а также произведено исследование влияния микронапряженного состояния материала для описываемого процесса на макрохарактеристики, во-первых, было установлено, что при увеличении скорости деформирования происходит "сгущение" расчетных кривых $\langle \sigma_x \rangle - \langle \dot{\varepsilon}_x \rangle$ к "классической" расчетной кривой мгновенного упругопластического деформирования (без учета деформации ползучести), причем при скорости $\langle \dot{\varepsilon}_x \rangle$ ($\langle \dot{\varepsilon}_x \rangle$ — индивидуальная для каждого материала) эти диаграммы практически не различаются. Однако происходит смещение локального экстремума графика (аналога временного предела сопротивления) вправо с увеличением скорости деформирования $\langle \dot{\varepsilon}_x \rangle$.

Во-вторых, существует диапазон скоростей нагружения $\langle \dot{\varepsilon}_x \rangle$, при которых в локальных элементах не появляются микропластические деформации и процесс деформирования идет за счет деформации ползучести в упругой области, однако диаграмма деформирования $\langle \sigma_x \rangle - \langle \dot{\varepsilon}_x \rangle$ такова, что макронапряжения $\langle \sigma_x \rangle$ на ней превышают предел пропорциональности $\sigma_{\text{пр}}$ для "классической" диаграммы. Это объясняется тем, что в процессе нагружения в условиях ползучести происходит

релаксация микронапряжений в наиболее нагруженных локальных элементах и требуется большее макронапряжение $\langle \sigma_x \rangle$, чтобы хотя бы в одном локальном элементе выполнялось условие $\sigma(\theta, \varphi) = \sigma_{\text{ТМ}}$. С позиций механики сплошных сред это внешне соответствует зависимости предела текучести материала от скорости нагружения $\langle \dot{\varepsilon}_x \rangle$, на что впервые было указано Ю.И. Кадашевичем.

В-третьих, появление участка разупрочнения (ниспадающая ветвь диаграммы $\langle \sigma_x \rangle - \langle \varepsilon_x \rangle$) связано с началом разрушения локальных элементов в соответствии с критерием разрушения локальных элементов как в упругой, так и упругопластической областях. В этом плане полученные результаты коррелируют с результатами работ Новосибирской школы (Горев Б.В., Банщикова И.А.), в которых указано на то, что ниспадающий участок на диаграмме $\langle \sigma_x \rangle - \langle \varepsilon_x \rangle$ начинается при величинах деформаций ползучести, соответствующих границе второй и третьей стадии стационарной кривой ползучести при $\langle \sigma_x \rangle = \text{const}$, такого, что на стадии установившейся ползучести это значение $\langle \sigma_x \rangle$ вызывает заданную скорость ползучести $\langle \dot{\varepsilon}_x \rangle = \text{const}$. А как было показано в пункте 2.2 настоящей работы граница второй и третьей стадий на кривой стационарной ползучести с позиций структурной модели связана с началом разрушения локальных элементов.

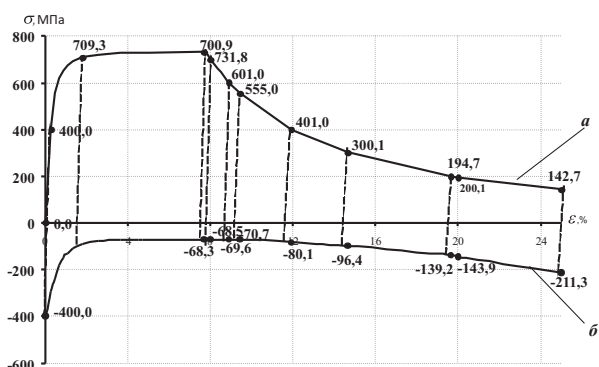


Рис. 5. Диаграмма упруго-пластического деформирования материала ЭИ 698 при $T=750\text{ }^{\circ}\text{C}$ (а) и распределение пределов текучести на сжатие (б)

В пункте 2.5 выполнено качественное и количественно моделирование эффекта Баушингера на основании структурной модели стержневого типа как на стадии упрочнения, так и пластического разупрочнения для модельного материала ЭИ 698 при $T=750\text{ }^{\circ}\text{C}$. Результаты расчетов приведены на рис. 5. Установлено, что зависимость пределов текучести (пропорциональности) на сжатие (после предварительного растяжения) в целом имеет немонотонный характер, т. е. на закритической стадии упругопластического деформирования наблюдается инверсия эффекта Баушингера. Впервые на возможность этого эффекта, исходя из общих положений теории пластически разупрочняющихся сред, указано Стружановым В.В.

В пункте 2.6 предложен метод решения одномерных краевых задач для стержневых систем из пластически разупрочняющегося материала на основании структурной модели, которая заменяет собой физические определяющие соотношения, связывающие напряжения и деформации. Выполнен ряд численных решений для модельных задач и выполнено сравнение данных расчета по структурной модели с данными расчета по классической феноменологической макромоделю (7). Отмечен эффект, что несмотря на упрочнение всей конструкции в целом, в отдельных ее элементах может наблюдаться разупрочнение материала.

В пункте 2.7 предложен метод решения краевых задач изгиба балки из пла-

стически разупрочняющегося материала на основании структурной модели среды, выполнен ряд модельных расчетов, детально проанализирована эволюция микронапряженного состояния по сечению балки и влияние микронапряженного состояния на макрохарактеристики материала и силовые характеристики балки.

В пункте 2.8 представлены выводы по разделу 2.

Глава 3. Структурная модель разупрочняющейся среды при сложном напряженном состоянии.

В главе 3 выполнено исследование устойчивого упругопластического деформирования при сложном напряженном состоянии и произведена проверка работоспособности критерия разрушения элемента структурной модели и материала в целом в условиях упругопластического деформирования и ползучести при различных видах напряженного состояния.

В пункте 3.1 сформулирована постановка задач данной главы.

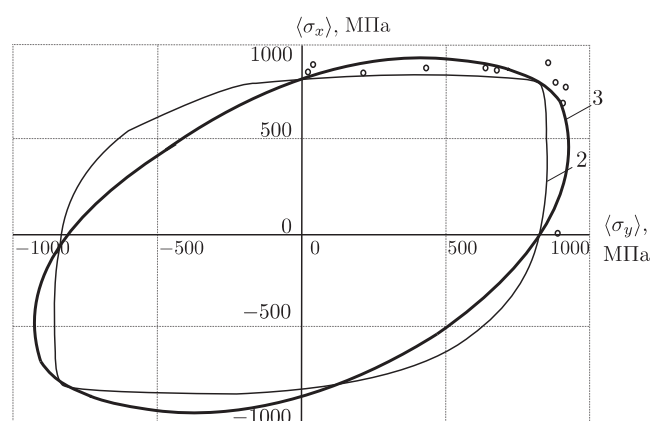


Рис. 6. Расчетные предельная поверхность, рассчитанная по структурной модели (2), предельная поверхность, рассчитанная по феноменологической теории пластичности разупрочняющегося материала (3), точки — экспериментальные данные. Сплав ЭИ 415 при $T=20\text{ }^{\circ}\text{C}$

Поэтому, если принять за предельное состояние материала появление первого разрушенного элемента структурной модели (дальнейшее закритическое деформирование возможно только в режиме "жесткого" нагружения), то можно построить так называемую предельную поверхность устойчивого упругопластического деформирования. В экспериментальных исследованиях эта поверхность соответствует поверхности разрушения в пространстве напряжений. В качестве примера на рис. 6 приведена рассчитанная по структурной модели предельная поверхность для плоского напряженного состояния и экспериментальные данные (Жуков А.М.) для материала ЭИ 415 при $T=20\text{ }^{\circ}\text{C}$. Для сравнения здесь же приведена предельная поверхность, построенная на основании феноменологической модели (7), обобщенной на случай сложного напряженного состояния.

В пункте 3.3 приведена методика расчета ползучести, накопления поврежденности и разрушения материала по структурной модели в условиях сложного напряженного состояния в главных осях. Выполнено сопоставление результатов расчета ползучести и длительной прочности для стали 12X18H10T при $T=800\text{ }^{\circ}\text{C}$

В пункте 3.2 представлена методика расчета напряженно-деформированного состояния при помощи структурной модели в условиях упругопластического нагружения при сложном напряженном состоянии. Если осуществляется режим "жесткого" нагружения, то появление зоны разрушения локальных элементов структурной модели приводит к появлению ниспадающей ветви диаграммы упругопластического деформирования.

по структурной модели с экспериментальными данными (режим нагружения: одноосное растяжение, растяжение+кручение, внутреннее давление+растяжение; общее число образцов—69), с данными расчета по прямым феноменологическим теориям длительной прочности на основе эквивалентных напряженных состояний и результатами расчета по феноменологической макромодели ползучести и длительной прочности энергетического типа. Показано, что наблюдается хорошая коррелированность расчетов по структурной модели с экспериментальными данными и теорией энергетического типа.

В пункте 3.4 приведены выводы по разделу 3.

Глава 4. Структурная модель нелинейно-упругой среды в условиях ползучести при сложном напряженном состоянии.

Глава 4 посвящена разработке структурной модели ползучести нелинейно-упругого материала, описывающей неклассический эффект влияния ползучести на упругую деформацию в условиях сложного напряженного состояния, а также исследованию и анализу ползучести нелинейно-упругих материалов в условиях сложного напряженного состояния.

В пункте 4.1 сформулирована постановка задачи. Отмечено, что в данной главе обобщаются результаты, полученные Радченко В.П. и Шапиевского Д.В. для нелинейно-упругих материалов в одноосном случае при помощи обобщенной нелинейной модели типа Максвелла на случай сложного напряженного состояния.

В пункте 4.2 выведены основные соотношения структурной модели для нелинейно-упругого материала для сложного напряженного состояния. В качестве основной структурной модели используется модель (1) – (6), обобщенная следующим образом: вместо линейного закона упругости локальных элементов вводится нелинейный закон со степенной аппроксимацией. Тогда уравнения состояния локального элемента примут вид:

$$\varepsilon(\theta, \varphi, t) = e(\theta, \varphi, t) + p(\theta, \varphi, t), \tag{8}$$

$$e(\theta, \varphi, t) = \frac{\sigma(\theta, \varphi, t)|\sigma(\theta, \varphi, t)|^{n-1}}{E_M}, \tag{9}$$

$$\dot{p}(\theta, \varphi, t) = a\sigma(\theta, \varphi, t)|\sigma(\theta, \varphi, t)|^{m-1}, \tag{10}$$

где E_M , n — параметры аппроксимации упругой деформации; a , m — параметры аппроксимации деформации вязкого течения (деформация пластичности не рассматривается). Уравнения равновесия (3), совместности деформаций (4) и гипотеза однородности деформации по объему (5) сохраняют свой вид и в данном случае.

В пункте 4.3 подробно изложена методика идентификации параметров структурной модели в упругой области и в области ползучести. Исходной информацией является диаграмма упругого деформирования, которая принимается в виде $\langle \varepsilon_x \rangle = \frac{\langle \sigma_x \rangle |\langle \sigma_x \rangle|^{n-1}}{E}$, и аппроксимация участков установившейся ползучести в виде $\langle \dot{\varepsilon}_x \rangle = A \langle \sigma_x \rangle |\langle \sigma_x \rangle|^{m-1}$, где n , E , m , A — макропараметры.

В пункте 4.4 рассматривается методика расчета реологического деформирования нелинейно-упругого материала по структурной модели в главных осях.

Для исследования эффекта влияния деформации ползучести на компоненты вектора упругой деформации рассмотрим следующий режим нагружения: пусть при $t \in [0, t^*]$ действуют постоянные компоненты тензора напряжений $\langle \sigma_x \rangle$, $\langle \sigma_y \rangle$, $\langle \sigma_z \rangle$ (в главных осях), а в момент $t = t^*$ происходит полная разгрузка, т. е. $\langle \sigma_x \rangle = \langle \sigma_y \rangle = \langle \sigma_z \rangle = 0$ для $t > t^*$. Вводится вектор упругой деформации при нагрузке $\exists^p \{ \langle e_x \rangle, \langle e_y \rangle, \langle e_z \rangle \}^T$ (T — операция транспонирования) в момент времени $t = 0+0$. Компоненты вектора упругих деформаций при разгрузке $\exists^p \{ \langle e_x \rangle, \langle e_y \rangle, \langle e_z \rangle \}^T$ в момент времени $t = t^*$ определяются из равенства

$$\exists^p = \begin{pmatrix} \langle \varepsilon_x(t^* - 0) \rangle \\ \langle \varepsilon_y(t^* - 0) \rangle \\ \langle \varepsilon_z(t^* - 0) \rangle \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \langle \varepsilon_x(t^* + 0) \rangle \\ \langle \varepsilon_y(t^* + 0) \rangle \\ \langle \varepsilon_z(t^* + 0) \rangle \end{pmatrix}.$$

Тогда, если эффекта влияния ползучести на компоненту упругой деформации не наблюдается, то должно выполняться условие

$$\exists^H = \exists^p, \quad (11)$$

если же этот эффект имеет место, то должно выполняться

$$\exists^H \neq \exists^p. \quad (12)$$

В пункте 4.5 приведен алгоритм численной реализации методики расчета ползучести нелинейно-упругих материалов при сложном напряженном состоянии и в, частности, для проверки выполнимости условий (11) и (12).

В пункте 4.6 показано, что эффект влияния ползучести на упругую деформацию имеет место и при сложном напряженном состоянии в случае, если локальные элементы (и материал на макроуровне) наделены законом нелинейной упругости (11). Так, при степенной аппроксимации закона нелинейной упругости (11) наблюдается принципиально различный характер годографов векторов нагрузки \exists^H и разгрузки после ползучести \exists^p в пространстве главных деформаций для показателей нелинейности $n > 1$ и $n < 1$, при этом нарушается (11) и происходит не только изменение модуля вектора нелинейных упругих деформаций в пространстве деформаций вследствие ползучести, но и его поворот, что является новым неизвестным ранее фактом.

При $n=1$ в (9) эффекта влияния ползучести на упругую деформацию не наблюдается и соотношение (11) выполняется.

Выполнен обстоятельный численный эксперимент, иллюстрирующий эффекты влияния ползучести на упругую деформацию, при различных видах напряженного состояния и различных значениях параметров материала (модели).

В качестве примера приведены типичные результаты, полученные для плоского напряженного состояния ($\langle \sigma_z \rangle = 0$) для пар точек $\{ \langle \sigma_x \rangle, \langle \sigma_y \rangle \}$, удовлетворяющих условию

$$S = \sqrt{(\langle \sigma_x \rangle)^2 + (\langle \sigma_y \rangle)^2 - \langle \sigma_x \rangle \langle \sigma_y \rangle} = S_0 = \text{const} \quad (13)$$

при $S_0 = 55$ МПа, для следующего режима нагружения: при $t \in [0, 100]$ мин приложена пара напряжений $\{\langle\sigma_x\rangle, \langle\sigma_y\rangle\}$, удовлетворяющая (13), а при $t=100$ мин производится разгрузка ($\langle\sigma_x\rangle = 0, \langle\sigma_y\rangle = 0$ при $t \in [100, 400]$ мин.)

На рис. 7, 8 показаны рассчитанные проекции годографов векторов Ξ^H и Ξ^P при нагрузке и разгрузке после ползучести в течение 100 мин, когда пары точек $\{\langle\sigma_x\rangle, \langle\sigma_y\rangle\}$ "пробегают" все значения на эллипсе (13) в пространстве напряжений для двух модельных материалов: вариант b_1 ($n = 0, 6; E = 13020$ (МПа) $^n; m = 2; A = 3 \cdot 10^{-6}$ МПа $^{-1}$ мин $^{-1}$), вариант c_1 ($n = 1, 685; E = 321060$ (МПа) $^n; m = 8, 455; A = 2, 5 \cdot 10^{-19}$ МПа $^{-1}$ мин $^{-1}$).

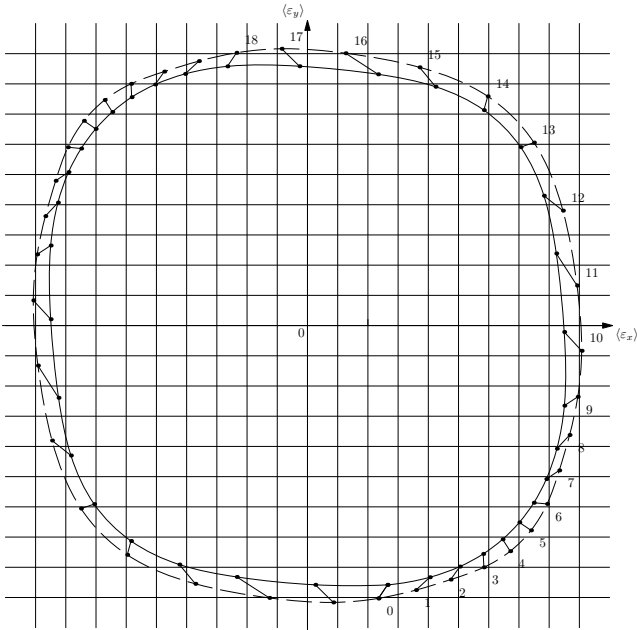


Рис. 7. Значения компонент проекции вектора упругой деформации Ξ^H (сплошная линия) на плоскость $0\langle\epsilon_x\rangle\langle\epsilon_y\rangle$ в момент приложения нагрузки ($t = 0$) и компонент проекции вектора Ξ^P (штриховая линия) после ползучести в течение 100 мин. при значениях $\langle\sigma_x\rangle$ и $\langle\sigma_y\rangle$, удовлетворяющих условию (13). Вариант b_1 . Масштаб по осям координат: 1 деление — $2 \cdot 10^{-4}$.

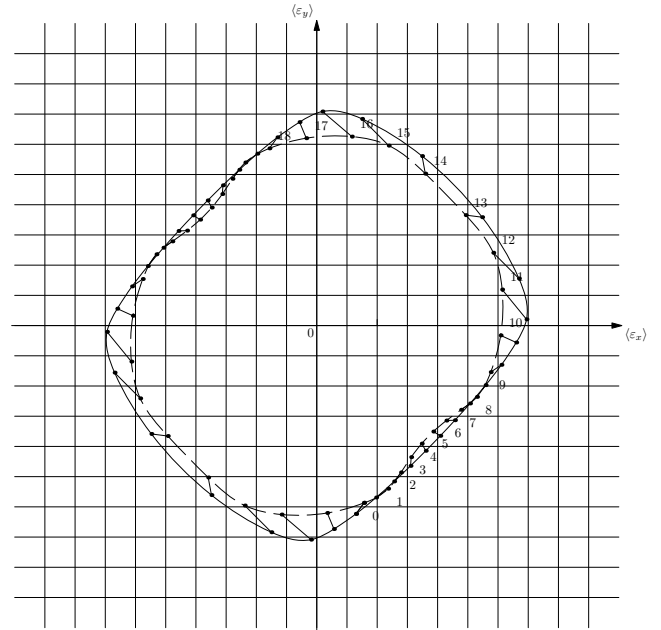


Рис. 8. Значения компонент проекции вектора упругой деформации Ξ^H (сплошная линия) на плоскости $0\langle\epsilon_x\rangle\langle\epsilon_y\rangle$ в момент приложения нагрузки ($t = 0$) и компонент проекции вектора Ξ^P (штриховая линия) после ползучести в течение 100 мин. при значениях $\{\langle\sigma_x\rangle$ и $\langle\sigma_y\rangle\}$, удовлетворяющих условию (13). Вариант c_1 . Масштаб по осям координат: 1 деление — $2 \cdot 10^{-3}$

Из этих рисунков видно, что при показателе нелинейности упругости $n < 1$, проекция годографа вектора Ξ^H лежит внутри проекции годографа вектора Ξ^P , а при $n > 1$ картина выглядит наоборот (при $n = 1$, как показали расчеты, и сами годографы векторов Ξ^H и Ξ^P , и их проекции совпадают). На рис. 7, 8 отрезками между годографами соединены точки, соответствующие одним и тем же парам значений $\langle\sigma_x\rangle, \langle\sigma_y\rangle$, откуда наглядно (визуально) видно, что действительно вектор упругих деформаций при $n \neq 1$ в процессе ползучести изменяет не только свой модуль, но и направление в пространстве главных деформаций.

Другой важный факт, установленный расчётами, состоит в том, что в процессе ползучести после разгрузки (вследствие релаксации остаточных микронапря-

жений в локальных элементах структурной модели) происходит восстановление первоначальных упругих свойств, т. е. годограф вектора Ξ^P приближается к годографу Ξ^H и в предельном случае (при $t \rightarrow \infty$) эти годографы совпадают. Другими словами, мгновенная нелинейно-упругая деформация проявляет одновременно наследственные свойства и свойства механической памяти. Это означает, что на феноменологическом уровне механики сплошных сред нельзя использовать гипотезу аддитивной упругой деформации и деформации ползучести.

В пункте 4.7 сформулированы выводы по разделу 4.

Основные результаты диссертационной работы

1. Разработана и исследована структурная модель разупрочняющихся сред вследствие деформаций пластичности и ползучести в условиях одноосного и сложного напряженных состояний.

2. Разработан метод решения одномерных краевых задач для стержневых систем и балок из пластически разупрочняющихся материалов на основании структурной модели, заменяющей собой физические соотношения, связывающие напряжения и деформации.

3. При помощи структурной модели качественно и количественно описан эффект Баушингера на стадии пластического разупрочнения и показано, что зависимость пределов текучести на сжатие (после предварительного растяжения) в целом носит немонотонный характер, т. е. на закритической стадии упругопластического деформирования наблюдается инверсия эффекта Баушингера.

4. С позиций структурной модели проанализировано влияние скорости нагружения на диаграмму деформирования в условиях ползучести. Показано, что существует диапазон скоростей деформаций, в которых в локальных элементах не появляются микропластические деформации и процесс деформирования идет за счет деформации ползучести в упругой области, однако макронапряжения превышают предел текучести для "классической" диаграммы (без учета деформации ползучести). Кроме этого, установлено, что предел текучести является функцией скорости нагружения.

5. Предложена методика построения поверхности устойчивого упругопластического деформирования на основании структурной модели в условиях сложного напряженного состояния, выполнена ее частичная экспериментальная проверка и приведено сопоставление расчетов по структурной модели и по известной феноменологической макромоделю энергетического типа.

6. Разработана методика расчета ползучести, накопления поврежденности (микроразрушений) и континуального разрушения материала при разных видах напряженного состояния. Выполнено сопоставление результатов расчета ползучести и длительной прочности по структурной модели с экспериментальными данными и данными расчета по известным теориям ползучести и длительной прочности.

7. Разработана структурная модель ползучести нелинейно-упругого материала, на основании которой показано, что эффект влияния ползучести на упругую деформацию имеет место и при сложном напряженном состоянии в случае, если

локальные элементы (и материал на макроуровне) наделены законом нелинейной упругости. При этом, при степенной аппроксимации закона нелинейной упругости наблюдается принципиально различный характер годографов векторов упругой деформации в пространстве деформаций при нагрузке и разгрузке после ползучести при постоянном тензоре напряжений для показателей нелинейности $n > 1$ и $n < 1$ (при $n = 1$ этого эффекта не наблюдается).

8. Показано, что происходит не только изменение модуля вектора нелинейно упругих деформаций в пространстве деформаций вследствие ползучести, но и его поворот, что является новым неизвестным ранее фактом. Установлено, что вследствие ползучести компоненты нелинейно-упругой деформации проявляют одновременно свойства механической памяти и вязкоупругости, а это означает, что на феноменологическом уровне механики сплошных сред для такого класса материалов нельзя использовать гипотезу аддитивности упругой деформации и деформации ползучести.

Основные результаты диссертации, опубликованные в рецензируемых журналах:

1. Андреева Е.А. Решение одномерных задач пластически разупрочняющегося материала // Вестник Самарск. госуд. техн. ун.–та. Серия: Физико-математические науки. 2008. № 2(17). С. 152–160.

2. Радченко В.П., Небогина Е.В., Андреева Е.А. Структурная модель разупрочняющегося при ползучести материала в условиях сложного напряженного состояния // Вестник Самарск. госуд. техн. ун.–та. Серия: Физико-математические науки. 2009. № 1(18). С. 75–85.

3. Радченко В.П., Андреева Е.А. О дрейфе и эффекте памяти нелинейно-упругой деформации вследствие ползучести для микронеоднородных материалов в условиях одноосного напряженного состояния // Вестник Самарск. госуд. техн. ун.–та. Серия: Физико-математические науки. 2009. № 2(19). С. 72–77.

В других сборниках:

4. Небогина Е.В., Андреева Е.А. Применение структурной модели к исследованию влияния скорости деформации на диаграмму деформирования материала // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды второй Всероссийской научной конференции — Самара: СамГТУ, 2005.- Часть 1. С. 98–102.

5. Небогина Е.В., Андреева Е.А. Решение одномерных краевых задач упруго-пластического деформирования на основе структурной модели разрушающейся среды // Тезисы докладов XXXII Самарской областной студенческой научной конференции. — Самара: СамГТУ, 2005. часть 1. С. 110.

6. Радченко В.П., Андреева Е.А. Численное моделирование микро- и макро-разрушения стержневых систем из пластически разупрочняющегося материала // Математическое моделирование и краевые задачи/ Труды третьей Всероссийской научной конференции - Самара: СамГТУ, 2006. Часть 1. С. 176–181..

7. Радченко В.П., Небогина Е.В., Андреева Е.А. Механизмы формирования остаточных микронапряжений при одноосном упруго-пластическом деформировании металлов с позиций структурно-феноменологического подхода // Сборник

тезисов XVI Международной конференции: "Физика прочности и пластичности материалов". — Самара, 2006. С. 199

8. Радченко В.П., Небогина Е.В., Андреева Е.А. Моделирование закритического упругопластического деформирования стержневых конструкций на основе структурной модели микронеоднородной среды // Тезисы докладов IV Всероссийского научного семинара, посвященного памяти профессора С.Д. Волкова - Екатеринбург. УрО РАН, 2006. С. 50.

9. Радченко В.П., Андреева Е.А., Агафонов А.А. Структурно-феноменологический подход к описанию упругопластического деформирования и разрушения элементов конструкций // Тезисы докладов Всероссийской научной конференции: Математика. Механика. Информатика. — Челябинск, 2006. - С. 111.

10. Радченко В.П., Андреева Е.А. Об эффекте Баушингера на стадии пластического разупрочнения материала // Зимняя школа по механике сплошных сред (пятнадцатая). Сборник статей. Ч.1 — Пермь, 2007. С. 42–45.

11. Радченко В.П., Андреева Е.А. Структурная математическая модель вязкоупругопластической разупрочняющейся среды // Тезисы докладов Международной конференции "XVIII сессия Международной школы по моделям механики сплошной среды". — Саратов, 2007. С. 92–93.

12. Радченко В.П., Андреева Е.А. Структурная математическая модель вязкоупругопластической разупрочняющейся среды // Материалы докладов Международной конференции "XVIII сессия Международной школы по моделям механики сплошной среды". — Саратов, 2007. С. 234–236.

13. Радченко В.П., Андреева Е.А. Анализ влияния ползучести на нелинейноупругую деформацию элементов конструкций из структурно-неоднородных материалов // Механика микронеоднородных материалов и разрушение. Тезисы докладов V Всероссийской конференции. — Екатеринбург, 2008. С. 110.

14. Радченко В.П., Небогина Е.В., Андреева Е.А. Математическое моделирование влияния скорости нагружения на полную диаграмму растяжения материала в условиях ползучести // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды 5-ой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч.1. — Самара, 2008. С. 239–245.

15. Андреева Е.А., Агафонов А.А. Решение краевой задачи изгиба балки из пластически разупрочняющегося материала на основании структурной модели // Актуальные проблемы современной науки. Труды 4-го Международного форума (9-ой Международной конференции) Ч.1–3. — Самара, 2008. С. 168–177.

16. Радченко В.П., Андреева Е.А. Оценка предельных состояний материалов в условиях неупругого реологического деформирования по структурной модели // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды 6-ой Всероссийской научной конференции с международным участием. — Самара, 2009. С. 214–221.

17. Андреева Е.А. Моделирование неупругого деформирования разупрочняющихся микронеоднородных материалов на основании структурной модели // Физика прочности и пластичности материалов. Сборник тезисов докладов XVII Международной конференции. Ч.1. — Самара, 2009. С. 288.

18. Андреева Е.А. Оценка длительной прочности тонкостенных цилиндриче-

ских оболочек из стали 12Х18Н10Т в условиях ползучести по структурной модели // Ресурс и диагностика материалов и конструкций. Тезисы докладов IV Российской научно-технической конференции. — Екатеринбург, 2009. С. 150.

19. Радченко В.П., Андреева Е.А. Структурная реологическая модель нелинейно-упругой среды при сложном напряженном состоянии // Математическое моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов. Труды VII Международной конференции. — Ульяновск, 2009. С. 230.