На правах рукописи

Базовкина Анна Сергеевна

Разработка методов параметрической идентификации дробных дифференциальных операторов на основе математических моделей в форме разностных уравнений

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Самара – 2014

Работа выполнена в *Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования "Самарский государственный технический университет"*

Научный руководитель:	*докт.тех.наук, доцент* *Зотеев Владимир Евгеньевич*
Официальные оппоненты:	*докт.физ.-мат.наук, профессор* *Вельмисов Пётр Александрович,* *заведующий кафедрой „Высшая математика“ ФГБОУ ВПО „Ульяновский государственный технический университет“* *докт.физ.-мат.наук, профессор* *Пулькина Людмила Степановна,* *профессор кафедры „Уравнения математической физики“ ФГБОУ ВПО „Самарский государственный университет“*
Ведущая организация:	*ФГБОУ ВПО „Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова“, г.Нальчик*

Защита состоится 31 октября 2014 г. в 10 часов на заседании диссертационного совета *Д 212.215.05*, созданного на базе *ФГАОУ ВО „Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет)“*, по адресу: *443086 Россия, г. Самара, Московское шоссе, 34*.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *ФГАОУ ВО „Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева (национальный исследовательский университет)“* и на сайте http://www.ssau.ru.

Автореферат разослан 12 сентября 2014 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета,
д.т.н., доцент *Востокин С. В.*

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Многие физические процессы описываются при помощи дифференциальных уравнений, в том числе и дифференциальных уравнений с производными дробного порядка. В настоящее время существует большое число книг и статей по теории и приложениям дифференциальных уравнений с дробными производными, но интерес к объектам, описываемым при помощи дробных дифференциальных уравнений, не ослабевает до сих пор, свидетельством чего являются публикации последних лет. В первую очередь повышенное внимание к таким системам связано с их многочисленными приложениями в различных областях физики и математики. При моделировании динамических процессов дробной (или фрактальной) природы зачастую необходимо решать не только прямую, но и обратную задачу. В связи с этим естественно возникает проблема параметрической идентификации данных процессов и дифференциальных операторов, с помощью которых они описываются. В то время как достаточно хорошо разработаны численные методы решения прямых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка, практически отсутствуют методы решения обратных задач для таких объектов, что связано с сильной нелинейностью подобных систем и неприменимостью классических методов идентификации. Классические методы идентификации хорошо работают с линейными объектами и не подходят для существенно нелинейных систем, каковыми являются дифференциальные уравнения с дробными производными. Для идентификации систем, описываемых при помощи дифференциальных уравнений дробного порядка, могут быть использованы численные методы, в основе которых лежит формирование линейно-параметрической дискретной модели (ЛПДМ) в форме разностных уравнений. Оценки коэффициентов разностного уравнения вычисляются с помощью итерационной процедуры, а на основе полученных результатов рассчитываются искомые оценки параметров математической модели. Другие методы нелинейного оценивания, например, метод Левенберга – Марквардта, также находят применение при решении поставленной задачи, однако имеют ряд таких недостатков, как необходимость выбора начального приближения, возможность существования неединственного решения и плохая сходимость метода. В то же время преимуществом ЛПДМ является их линейность по коэффициентам и быстрая сходимость итерационной процедуры оценивания, которая не требует выбора начального приближения.

В качестве объекта дальнейших исследований в работе рассматривается уравнение вида

$$D_{0t}^{\alpha} y - \mu y = 0, \tag{1}$$

где $(D^{\alpha} f)(x) = \dfrac{d^{[\alpha]}}{dx^{[\alpha]}} \left(D^{\alpha-[\alpha]} f \right)(x) = \dfrac{1}{\Gamma\left([\alpha]+1-\alpha\right)} \dfrac{d^{[\alpha]+1}}{dx^{[\alpha]+1}} \int\limits_0^x \dfrac{f(\Theta)\, d\Theta}{(x-\Theta)^{\alpha-[\alpha]}}$ — дифференциальный оператор Римана – Лиувилля порядка α, $[\alpha]$ — целая часть числа α, $t > 0$.

В качестве дробно-дифференциального уравнения в частных производных используется следующее уравнение, описанное в работах многих отечественных и зарубежных учёных

$$\frac{\partial^{\gamma} c(x,t)}{\partial t^{\gamma}} = d(x) \frac{\partial^{\alpha} c(x,t)}{\partial x^{\alpha}}, \tag{2}$$

где $t > 0$, $0 < \gamma < 1$, $1 < \alpha < 2$.

Цель диссертационной работы состоит в разработке и исследовании новых математических дискретных моделей, численных методов и программных средств для определения параметров систем, описываемых дифференциальными уравнениями дробного порядка вида (1), (2).

Для достижения поставленных целей были решены следующие задачи:

– построение для объектов и систем, описание которых содержит дифференциальные операторы дробного порядка, линейно-параметрических дискретных моделей, описывающих в форме разностных уравнений результаты эксперимента;

– разработка численных методов параметрической идентификации систем, описываемых дифференциальными уравнениями дробного порядка, на основе среднеквадратичного оценивания коэффициентов стохастического разностного уравнения;

– численно-аналитические исследования сходимости и погрешности предложенных методов среднеквадратичного оценивания коэффициентов разностных уравнений и погрешности вычисления оценок параметров дифференциальных уравнений с дробными производными;

– разработка программного обеспечения, реализующего численные методы определения параметров системы, описываемой дифференциальными уравнениями дробного порядка, на основе разностных уравнений.

Научная новизна работы состоит в следующем:

– построены новые линейно-параметрические дискретные математические модели для систем с дробными производными, описывающие в форме разностных уравнений результаты эксперимента, и, в отличие от существующих, позволяющие осуществлять процедуру параметрической идентификации таких систем;

– разработаны новые численные методы параметрической идентификации систем, описываемых дифференциальными уравнениями дробного порядка, отличающиеся от известных новыми соотношениями между коэффициентами разностного уравнения, параметрами аппроксимирующей функции и параметрами дифференциального уравнения с производными дробного порядка;

– сформулированы и доказаны теоремы сходимости новых итерационных процедур, позволяющих, в отличие от существующих, осуществлять структурно-параметрическую идентификацию процессов, описываемых дифференциальными уравнениями с дробными производными;

– проведены численные исследования погрешности оценивания при помощи разработанных численных методов, по результатам которых сделаны выводы о применимости каждого из предложенных методов в зависимости от соотношения параметров задачи типа Коши для дифференциального уравнения дробного порядка (1);

– разработано программное обеспечение, реализующее предложенные в работе численные методы и позволяющее оптимизировать процедуру параметрической идентификации процессов, описываемых дифференциальными уравнениями дробного порядка.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты, изложенные в диссертации, могут быть использованы при решении задач параметрической идентификации различных процессов и систем, описываемых при помощи дифференциальных уравнений с производными дробного порядка, в задачах реологии, вязкоупругости, аномальной диффузии в пористых (фрактальных) структурах, теории автоматического управления, физической химии, биологии и т. д.

Достоверность полученных результатов обеспечивается корректностью использования математического аппарата и вводимых гипотез и допущений, численными экспериментами исследования адекватности моделей, а также сравнением численных решений рассматриваемых задач с известными аналитическими результатами в частных случаях (когда порядок дифференциального оператора принимает целые значения).

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

– математические модели в виде линейно-параметрических дискретных моделей, описывающих в форме стохастических разностных уравнений результаты эксперимента для процессов (1), (2) при различных значениях порядка дробного дифференциального оператора;

– численные методы и алгоритмы параметрической идентификации дифференциальных операторов дробного порядка на основе среднеквадратичного оценивания коэффициентов ЛПДМ;

– результаты численно-аналитических исследований сходимости и погрешности оценивания предложенных методов;

– прикладное программное обеспечение для решения задачи определения параметров систем, описываемых при помощи дробных дифференциальных уравнений.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях: 3-ем, 4-ом, 5-ом Международных форумах (8-й, 9-й, 10-й Международ. конф. молодых учёных и студентов), г. Самара, 2007, 2008, 2009; Пятой, Шестой, Седьмой, Восьмой Всероссийских научных конференциях с международным участием „Математическое моделирование и краевые задачи“ (г. Самара, 2008, 2009, 2010, 2011); Международных научных молодёжных конференциях по естественным и техническим дисциплинам (г. Йошкар-Ола, 2009, 2010); XVII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (г. Алушта, 2011); XII Всероссийской конференции молодых учёных по математическому моделированию и информационным технологиям (г. Новосибирск, 2011); V Научно-практической конференции по математическому моделированию и компьютерным технологиям в процессах разработки месторождений (г. Уфа, 2012).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 19 печатных работах, из них 4 статьи в рецензируемых журналах [1–4], 1 статья в сборнике научных трудов, 7 статей в сборниках трудов конференций и 7 тезисов докладов.

Внедрение. Результаты диссертационного исследования, оформленные в виде программы для ЭВМ, внедрены в производственную деятельность ООО „СамараНИПИнефть“. На разработанное программное обеспечение получено свидетельство о регистрации программы для ЭВМ [5] в Федеральной службе по интеллектуальной собственности.

Благодарности. Автор выражает признательность к.ф.-м.н., доценту Огородникову Евгению Николаевичу за полезные советы и плодотворное сотрудничество.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Постановка задачи и подготовка к публикации полученных результатов в работах [1, 6–11] проводилась совместно с соавторами, при этом решение дифференциальных уравнений в работах [1, 6–8], построение стохастических разностных уравнений, разработка метода параметрической идентификации в работе [10] представляют личный вклад автора. В работе [11] вклад автора заключается в постановке задачи, разработке метода параметрической идентификации, проведении численно-аналитических исследований предложенного метода, анализе его применимости к задачам идентификации пластовых систем. Работы [2–4, 12–20] выполнены автором самостоятельно. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, 6 глав, заключения, библиографии и приложения. Общий объём диссертации 182 страницы, из них 165 страниц текста, включая 68 рисунков и 16 таблиц. Библиография включает 130 наименований на 15 страницах.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В первой главе приведён обзор литературных источников, посвящённых исследованию и практическому применению систем, которые описываются уравнениями с дифференциальным оператором дробного порядка, а также проведён анализ современных методов параметрической идентификации динамических систем.

В п. 1.1 представлен обзор процессов и систем, описываемых дифференциальными уравнениями с дробными производными, приводятся наиболее распространённые практические приложения дробно-дифференциальных задач в различных областях. В частности, уравнения, содержащие интегро-дифференциальный оператор дробного порядка, возникают при использовании дробного исчисления для описания поведения или состояния реальной физической среды или процесса; очевидна востребованность дробного исчисления в таких областях науки, как классическая и квантовая физика, теория поля, физика твердого тела, динамика жидкости, турбулентность, общая химия, нелинейная биология, стохастический анализ, нелинейная теория управления, обработка изображений и т. д. Применению дробного исчисления посвящены труды F. Mainardi и R. Gorenflo, В. В. Васильева и Л. А. Симак и др. Приведены различные определения дробной производной: Римана – Лиувилля, Капуто, Грюнвальда – Летникова.

Проведённый в п. 1.2 обзор существующих методов параметрической идентификации различных механических систем позволяет сделать вывод о том, что ни один из разработанных ранее подходов к решению задачи идентификации не может в полной мере быть перенесён на объекты фрактальной структуры. В то же время, в основу нового подхода к идентификации систем и объектов, описываемых при помощи дробных дифференциальных уравнений, может быть положен помехозащищённый метод среднеквадратичного оценивания коэффициентов линейно-параметрической дискретной модели (ЛПДМ), описанный в работах В. Е. Зотеева, а выявленные закономерности в разработке методов параметрической идентификации могут быть систематизированы и использованы в дальнейшем.

В п. 1.3 рассмотрены дифференциальные уравнения с дробными производными вида (1), (2), приведены задачи типа Коши для таких уравнений и существующие аналитические решения, а также графики решений исходных дифференциальных уравнений; предложены новые подходы к решению поставленной задачи идентификации систем, описываемых при помощи дифференциальных уравнений с производными дробного порядка. Основное внимание в работе уделяется идентификации дифференциальных операторов Римана – Лиувилля.

Уравнение (2) эффективно описывает широко изучаемое в настоящее время явление аномальной диффузии. Решение уравнения (2) может быть построено в общем случае только в численном виде на основе формул численного дифференцирования для производных дробного порядка.

Во второй главе предложены новые численные методы параметрической идентификации процессов, описываемых дифференциальными уравнениями дробного порядка вида (1), основанные на применении асимптотического свойства функции типа Миттаг – Леффлера. Построены линейно-параметрические дискретные модели для аппроксимационных решений, проанализированы методы повышения эффективности процедуры оценивания на основе применения методов минимизации невязки и свойств аппроксимирующей функции при $t \to \infty$.

В п. 2.1 приведены асимптотические формулы для функции типа Миттаг – Леффлера, рассмотрена возможность их применения в задаче параметрической идентификации исследуемых процессов. На основании приведённой в книге М. М. Джрбашяна асимптотической формулы построены аппроксимации функции типа Миттаг – Леффлера при $t \to \infty$, оценена погрешность предложенных аппроксимаций. Предложенные аппроксимационные модели представлены в таблице 1.

Таблица 1. Аппроксимационные модели для решения дифференциального уравнения (1)

μ \ α	$0 < \alpha < 1$	$1 < \alpha < 2$
$\mu > 0$	$\hat{y}(t) = c_0 e^{pt} + c_1 t^s$	$\hat{y}(t) = c_0 e^{pt} + c_1 t^{s_1} + d_1 t^{s_2}$
$\mu < 0$	$\hat{y}(t) = c_1 t^{s_1} + c_2 t^{s_2}$	$\hat{y}(t) = c_1 t^{s_1} + c_2 t^{s_2} + d_1 t^{s_3}$

В п. 2.2 построены линейно-параметрические дискретные модели для четырёх случаев вариации параметров дробно-дифференциального уравнения, описана процедура среднеквадратичного оценивания коэффициентов ЛПДМ, приводятся соотношения, связывающие параметры исходного процесса, параметры аппроксимирующей функции и коэффициенты ЛПДМ. Процесс построения ЛПДМ для аппроксимирующей функции на примере случая $0 < \alpha < 1$, $\mu > 0$ можно представить следующим образом:

– переход от непрерывной функции к её дискретному аналогу

$$\hat{y}_k = c_0 \exp\left(p\tau(l+k)\right) + c_1 \tau^s (l+k)^s, \ k = 1, 2, .., N,$$

где N — объём выборки, l — количество временных шагов сдвига;

– построение рекуррентной формулы, связывающей несколько последовательных отсчётов $\hat{y}_k$ и позволяющей представить функцию в виде линейной дискретной модели

$$\hat{y}_1 = \lambda_4,$$
$$\hat{y}_k = \lambda_1 \hat{y}_{k-1} + \lambda_2 (k+l)^s + \lambda_3 (k+l-1)^s, \ k = 2, 3, .., N,$$

где

$$\lambda_1 = \exp(p\tau), \ \lambda_2 = c_1 \tau^s,$$
$$\lambda_3 = -\lambda_1 \lambda_2, \ \lambda_4 = \lambda_1^{1+l} c_0 + \lambda_2 (1+l)^s.$$

С учётом наличия случайной аддитивной помехи в результатах наблюдений линейно-параметрические дискретные модели для каждой из аппроксимаций, представленных в таблице 1, имеют следующий вид:

$$\begin{cases} y_1 = \lambda_4 + e_1, \\ y_k = \lambda_1 y_{k-1} + \lambda_2 (k+l)^s + \\ +\lambda_3 (k+l-1)^s + \eta_k, k = 2, 3, .., N, \\ \eta_k = e_k - \lambda_1 e_{k-1}, \ k = 2, 3, .., N. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = \lambda_6 + e_1, \\ y_k = \lambda_1 y_{k-1} + \lambda_2 (k+l)^s + \\ \lambda_3 (k+l-1)^s + \lambda_4 (k+l)^{s-1} + \\ +\lambda_5 (k+l-1)^{s-1} + \eta_k, \ k = 2, 3, .., N, \\ \eta_k = e_k - \lambda_1 e_{k-1}, \ k = 2, 3, .., N. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = \lambda_2 + e_1, \\ (k+l-1)^{s_1} y_k - (k+l)^{s_1} y_{k-1} = \\ = \lambda_1\big((k+l)^{s_2}(k+l-1)^{s_1} - \\ -(k+l)^{s_1}(k+l-1)^{s_2}\big) + \eta_k, \\ \eta_k = (k+l-1)^{s_1} e_k - (k+l)^{s_1} e_{k-1}, \\ k = 2,3,..,N. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = \lambda_3 + e_1, \\ (k+l-1)^{s_1} y_k - (k+l)^{s_1} y_{k-1} = \\ = \lambda_1\big((k+l)^{s_2}(k+l-1)^{s_1} - \\ -(k+l)^{s_1}(k+l-1)^{s_2}\big) + \\ +\lambda_2\big((k+l)^{s_3}(k+l-1)^{s_1} - \\ -(k+l)^{s_1}(k+l-1)^{s_3}\big) + \eta_k,\ k = 2,3,..,N, \\ \eta_k = (k+l-1)^{s_1} e_k - \\ -(k+l)^{s_1} e_{k-1},\ k = 2,3,..,N. \end{cases}$$

В матричной форме разностные уравнения принимают вид

$$\begin{cases} b = F\lambda + \eta, \\ \eta = P_\lambda e; \end{cases} \tag{3}$$

где $\eta = (\eta_1, \eta_2, .., \eta_N)^T$ — N-мерный вектор эквивалентного возмущения в разностном уравнении; P_λ — матрица эквивалентного возмущения; $b = (y_1, y_2, .., y_N)^T$ — N-мерный вектор правой части; λ — вектор коэффициентов ЛПДМ; F — матрица регрессоров; $e = y - \hat{y}$ — вектор остатков.

Решение матричной системы (3) сводится к минимизации функционала вида

$$\|e\|^2 = \|y - \hat{y}\|^2 \to \min, \tag{4}$$

Оценки коэффициентов λ_j вычисляются при помощи итерационной процедуры:

$$\hat{\lambda}^{(0)} = (F^T F)^{-1} F^T b,$$

$$\hat{\lambda}^{(i)} = (F^T \Omega^{-1}_{\hat{\lambda}^{(i-1)}} F)^{-1} F^T \Omega^{-1}_{\hat{\lambda}^{(i-1)}} b,\ i = 1, 2, ...,$$

где $\Omega_{\hat{\lambda}^{(i-1)}} = P_{\hat{\lambda}^{(i-1)}} P^T_{\hat{\lambda}^{(i-1)}}$ — квадратная симметричная матрица размера $N \times N$.

Получены соотношения, связывающие параметры аппроксимирующей модели и решения дробно-дифференциального уравнения (1).

В п. 2.3 описан алгоритм численного метода, в основе которого лежит процедура минимизации невязки, и рассмотрена возможность его применения к задачам определения параметров дробно-дифференциальных операторов. Задача минимизации невязки имеет вид, представленный в таблице 2.

Таблица 2. Постановка задачи минимизации невязки для дифференциального уравнения (1)

$0 < \alpha < 1$	$1 < \alpha < 2$
$\|D^\alpha_{0t}\hat{y} - \mu\hat{y}\| \to \min,$ $\lim\limits_{t\to 0} D^{\alpha-1}_{0t}\hat{y} = a_1.$	$\|D^\alpha_{0t}\hat{y} - \mu\hat{y}\| \to \min,$ $\lim\limits_{t\to 0} D^{\alpha-1}_{0t}\hat{y} = a_1,\ \lim\limits_{t\to 0} D^{\alpha-2}_{0t}\hat{y} = a_2.$

Суть метода заключается в том, что функциональные зависимости между параметрами дифференциального уравнения дробного порядка (μ, a_1, a_2) и аппроксимирующей модели (c_0, p, c_1, d_1, c_2) выводятся на основе выполнения условий минимизации невязки.

В п. 2.4 описывается алгоритм численного метода, в основе которого лежит предельный переход аппроксимирующей функции. Суть метода заключается в том, что аппроксимирующая функция при подстановке в дифференциальное уравнение с учётом $t \to \infty$ обращает уравнение в точное равенство, в результате чего могут быть получены соотношения между параметрами уравнения и аппроксимирующей функции.

В третьей главе предложен новый численный метод определения параметров дифференциального оператора, входящего в уравнение (1), основанный на применении формул численного интегро-дифференцирования для производных дробного порядка. Построены разностные схемы для дробного дифференциального оператора, описана новая итерационная процедура вычисления оценок коэффициентов линейно-параметрической дискретной модели, сформулирована и доказана теорема о сходимости итерационного процесса.

В п. 3.1 приведены формулы численного дифференцирования для дробных дифференциальных операторов, в основе которых лежит формула Грюнвальда – Летникова:

$$D_{0t}^{\alpha} y(t) \approx h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\left[\frac{t}{h}\right]} b_j y(t-jh), \text{ где } b_0 = 1, b_j = \left(1 - \frac{1+\alpha}{j}\right) b_{j-1},\ j \geq 1.$$

Проведены численные исследования погрешности применения численных формул для построения решения дробно-дифференциального уравнения (1), позволяющие сделать вывод о целесообразности применения предложенного подхода.

В п. 3.2 построены линейно-параметрические дискретные модели на основе применения формул численного дифференцирования, описана процедура оценивания коэффициентов ЛПДМ. Построенные разностные уравнения имеют вид

$$\begin{cases} y_1 = \lambda_3 + e_1, \\ y_2 = \lambda_1 y_1 + \lambda_3 \dfrac{1-\alpha}{2} + e_2 - \lambda_1 e_1, \\ y_3 = \lambda_1 y_2 + \lambda_2 y_1 + \lambda_3 M_1^{\alpha} \dfrac{1-\alpha}{2} + e_3 - \lambda_1 e_2 - \lambda_2 e_1, \\ y_k = \lambda_1 y_{k-1} + \lambda_2 \left(y_{k-2} + \sum\limits_{j=1}^{k-3} M_j^{\alpha} y_{k-2-j} \right) + \lambda_3 M_{k-2}^{\alpha} \dfrac{1-\alpha}{2} + \eta_k, \\ \eta_k = e_k - \lambda_1 e_{k-1} - \lambda_2 \left(e_{k-2} + \sum\limits_{j=1}^{k-3} M_j^{\alpha} e_{k-2-j} \right),\ k = 4, 5, .., N; \end{cases}$$

где $M_i^{\alpha} = \dfrac{2-\alpha}{3} \cdot \dfrac{3-\alpha}{4} \cdot ... \cdot \dfrac{i+1-\alpha}{i+2}$, $i \geq 1$; $\lambda_1 = \dfrac{\alpha}{1-\mu\tau^{\alpha}}$, $\lambda_2 = \dfrac{\alpha}{1-\mu\tau^{\alpha}} \dfrac{1-\alpha}{2}$, $\lambda_3 = \dfrac{a_1 \tau^{\alpha-1} \alpha}{1-\mu\tau^{\alpha}}$.

В связи с тем, что коэффициенты M_i^{α}, а следовательно, и элементы матрицы регрессоров, зависят от порядка дробного дифференциального оператора α, предложено использование новой итерационной процедуры, заключающейся в формировании матрицы регрессоров на каждой итерации. Задача определения параметров дробных дифференциальных операторов в данном разделе расширяется до задачи структурно-параметрической идентификации, которая включает определение порядка α дробного дифференциального оператора.

Оценки коэффициентов λ_j при помощи новой итерационной процедуры вычисляются следующим образом:

$$\hat{\lambda}^{(j)} = (F^{(j-1)T} \Omega^{-1}_{\hat{\lambda}^{(j-1)}} F^{(j-1)})^{-1} F^{(j-1)T} \Omega^{-1}_{\hat{\lambda}^{(j-1)}} b, \tag{5}$$

где $F^{(j-1)} = F\left(\hat{\alpha}^{(j-1)}\right)$, $j = 1, 2, ..,$ $\Omega_{\hat{\lambda}^{(j-1)}} = P_{\hat{\lambda}^{(j-1)}}\left(\hat{\alpha}^{(j-1)}\right) P_{\hat{\lambda}^{(j-1)}}\left(\hat{\alpha}^{(j-1)}\right)^T$, $\hat{\lambda}$ — оценки вектора λ, полученные при помощи новой итерационной процедуры.

В п. 3.3 сформулирована и доказана теорема сходимости новой итерационной процедуры (5) оценивания параметров дробных дифференциальных операторов на основе разностных схем, выведены формулы, связывающие параметры исходного процесса и коэффициенты ЛПДМ, проведены исследования скорости сходимости итерационной процедуры.

Теорема 1 (Достаточное условие сходимости итерационной процедуры (5)). *Пусть вектор оценок коэффициентов ЛПДМ $\hat{\lambda}$ может быть представлен как решение следующего уравнения:*

$$\hat{\lambda} = q\left(\hat{\lambda}\right), \tag{6}$$

причём функции $q_i\left(\hat{\lambda}\right)$ и $\dfrac{\partial q_i\left(\hat{\lambda}\right)}{\partial \hat{\lambda}_j}$, $i,\ j = 1, 2, .., n$, определены и непрерывны в известной замкнутой области Γ_0 действительного n-мерного пространства E^n и в области Γ_0 выполняется неравенство

$$\beta = \max_{\hat{\lambda}\in\Gamma_0}\left(\max_{i=1,2,..,n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\left|\frac{\partial g_{ik}}{\partial\hat{\lambda}_j}e_k - g_{ik}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_{ks}}{\partial\hat{\lambda}_j}\hat{\lambda}_s\right|\left\|\left(F_{\hat{\lambda}}^T\Omega_{\hat{\lambda}}^{-1}F_{\hat{\lambda}}\right)^{-1}\right\|\right) < 1,$$

где g_{ik} — элементы матрицы $G(\hat{\lambda}) = F^T(\hat{\lambda})\Omega^{-1}(\hat{\lambda})$ размера $n \times N$, n — размерность вектора $\hat{\lambda}$, $e = b - F\hat{\lambda}$ — вектор остатков, $\dfrac{\partial f_{ks}}{\partial\hat{\lambda}_j} = \dfrac{df_{ks}}{d\hat{\alpha}}\dfrac{\partial\hat{\alpha}}{\partial\hat{\lambda}_j}$. Тогда, если последовательные приближения

$$\hat{\lambda}^{(k)} = q\left(\hat{\lambda}^{(k-1)}\right),\ k = 1, 2, ... \tag{7}$$

не выходят из области Γ_0: $\hat{\lambda}^{(k)} \in \Gamma_0$, то: (а) при любом начальном приближении $\alpha^{(0)}$: $\hat{\lambda}^{(1)} = \hat{\lambda}(\alpha^{(0)}) \in \Gamma_0$ итерационный процесс (7) сходится, то есть существует предел $\lim\limits_{k\to\infty}\hat{\lambda}^{(k)} = \bar{\lambda}$; (б) предельный вектор $\bar{\lambda}$ является единственным решением уравнения (6) в области Γ_0; (в) имеет место оценка

$$\left\|\bar{\lambda} - \hat{\lambda}^{(k)}\right\| \le \frac{\beta}{1-\beta}\left\|\hat{\lambda}^{(k)} - \hat{\lambda}^{(k-1)}\right\|.$$

Получены следующие формулы для оценки параметров процесса, описываемого при помощи дифференциального уравнения (1):

$$\hat{\alpha}^{(i)} = 1 - \frac{2\hat{\lambda}_2}{\hat{\lambda}_1},\ \hat{\mu} = \left(1 - \frac{\hat{\alpha}^{(i)}}{\hat{\lambda}_1}\right)\tau^{-\hat{\alpha}^{(i)}},\ \hat{a}_1 = \frac{\hat{\lambda}_3}{\hat{\lambda}_1}\tau^{1-\hat{\alpha}^{(i)}}.$$

Результаты численных исследований сходимости итерационной процедуры (5), представленные на рис. 1, позволяют сделать вывод о высокой скорости сходимости итерационной процедуры. На рисунке представлены графики среднеквадратичного отклонения модели s от аналитического решения в зависимости от числа итераций N_i при различных значениях начального приближения $\alpha^{(0)}$: $\alpha^{(0)} = 0,1$, $\alpha^{(0)} = 0,5$, $\alpha^{(0)} = 0,9$.

В четвёртой главе рассмотрен метод параметрической идентификации процессов, описываемых при помощи дифференциальных уравнений с частными дробными производными, на примере явления аномальной диффузии; описана математическая модель процесса в виде дифференциального уравнения дробного порядка (2). Построена разностная схема для дробных дифференциальных операторов,

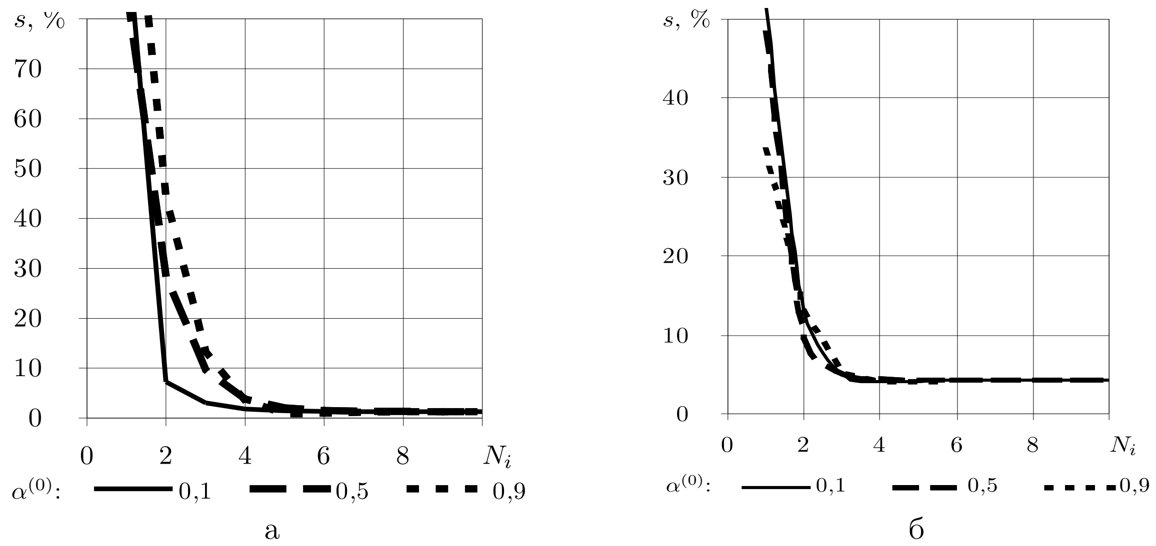

Рис. 1. Зависимость среднеквадратичного отклонения s от количества итераций N_i при (а) $\mu > 0$ и (б) $\mu < 0$

описан алгоритм вычисления оценок параметров процесса аномальной диффузии, сформулирована теорема о сходимости новой итерационной процедуры оценивания коэффициентов ЛПДМ.

В п. 4.1 описана модель процесса аномальной диффузии, в основе которой лежат дифференциальные операторы дробного порядка по координатам времени и пространства (2). Проанализированы области применения диффузионных процессов с аномальными свойствами; приведены формулы численного дифференцирования для дробных дифференциальных операторов, оценена погрешность применения численных формул для построения решения дробно-дифференциальных уравнений. Уравнение аномальной диффузии в дискретной форме имеет вид

$$\frac{1}{\tau^\gamma}\sum_{l=0}^{n+1} g_{\gamma,l}c_l^{n-l+1} = \frac{d_i}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{i+1} g_{\alpha,k}c_{i-k+1}^n,$$

где d_i — значения коэффициентов диффузии в точках x_i, индексы n и i зависят от объёма входной информации об объекте, т. е. от величины времени наблюдения за объектом („длины памяти“ объекта) и его пространственной размерности.

В п. 4.2 построены линейно-параметрические дискретные модели на основе применения формул численного дифференцирования, описана процедура оценивания коэффициентов ЛПДМ, имеющей вид

$$\left\{\begin{array}{c} y_{i+1} = \lambda_{1+2N_x+i} + e_{i+1},\ i = 0,1,2,..,N_x-1; \\ y_{i+1+(k+1)N_x} = \lambda_{2+N_x+i}y_{i+2+kN_x} + \lambda_{2+i}y_{i+1+kN_x} + \\ +\lambda_{2+i}\sum\limits_{j=0}^{i-1}\tilde{M}_j^\alpha y_{i-j+kN_x} + \lambda_1 y_{i+1+kN_x} + \lambda_1\sum\limits_{j=0}^{k-1}\tilde{M}_j^\gamma y_{i+1+(k-1-j)N_x} + \eta_{i+1+(k+1)N_x}, \\ k = 0,1,2,..,N_t-2,\ i = 0,1,2,..,N_x-1; \\ \eta_{i+1+(k+1)N_x} = e_{i+1+(k+1)N_x} - \lambda_{2+N_x+i}e_{i+2+kN_x} - \lambda_{2+i}e_{i+1+kN_x} - \\ -\lambda_{2+i}\sum\limits_{j=0}^{i-1}\tilde{M}_j^\alpha e_{i-j+kN_x} - \lambda_1 e_{i+1+kN_x} - \lambda_1\sum\limits_{j=0}^{k-1}\tilde{M}_j^\gamma e_{i+1+(k-1-j)N_x}, \\ k = 0,1,2,..,N_t-2,\ i = 0,1,2,..,N_x-1, \end{array}\right. \tag{8}$$

где $y = \left(y_1, y_2, .., y_{(N_x N_t)}\right)^T = \left(c_0^0, c_1^0, .., c_{N_x-1}^0, c_0^1, ..., c_{N_x-1}^1, .., c_{N_x-1}^{N_t-1}\right)^T$, $\tilde{M}_n^\beta = \dfrac{1-\beta}{2} \cdot \dfrac{2-\beta}{3} \cdot \dfrac{3-\beta}{4} \cdot ... \cdot \dfrac{n+1-\beta}{n+2}$, $i, k \geq 0$.

Итерационная процедура оценивания коэффициентов ЛПДМ (8) может быть записана следующим образом:

$$\hat{\lambda}^{(j)} = (F^{(j-1)T} \Omega^{-1}_{\hat{\lambda}^{(j-1)}} F^{(j-1)})^{-1} F^{(j-1)T} \Omega^{-1}_{\hat{\lambda}^{(j-1)}} b, \tag{9}$$

где $F^{(j-1)} = F\left(\hat{\gamma}^{(j-1)}, \hat{\alpha}^{(j-1)}\right)$, $j = 1, 2, ..$,
$\Omega_{\hat{\lambda}^{(j-1)}} = P_{\hat{\lambda}^{(j-1)}}\left(\hat{\gamma}^{(j-1)}, \hat{\alpha}^{(j-1)}\right) P_{\hat{\lambda}^{(j-1)}}\left(\hat{\gamma}^{(j-1)}, \hat{\alpha}^{(j-1)}\right)^T$, $\hat{\lambda}$ — оценки вектора λ, полученные при помощи итерационной процедуры (9).

В п. 4.3 сформулирована теорема сходимости новой итерационной процедуры (9) оценивания параметров процесса аномальной диффузии на основе разностных схем; выведены формулы, связывающие параметры диффузионного процесса и коэффициенты ЛПДМ. Показано, что для сходимости итерационной процедуры, в основе которой лежит формирование матрицы регрессоров на каждой итерации, достаточно 5 – 6 итераций. Формулы связи между коэффициентами ЛПДМ и параметрами задачи типа Коши для дифференциального уравнения (2) имеют вид

$$\hat{\alpha}^{(i)} = -\frac{\hat{\lambda}_2^{(i)}}{\hat{\lambda}_{2+N_x}^{(i)}},\ \hat{\gamma}^{(i)} = \hat{\lambda}_1^{(i)},\ \hat{c}_i^0 = \hat{\lambda}_{1+2N_x+i},\ i = 0, 1, .., N_x - 1;$$

$$\hat{d}_i = \frac{h^{\hat{\alpha}^{(i)}} \hat{\lambda}_{2+N_x+i}}{\tau^{\hat{\gamma}^{(i)}}},\ i = 0, 1, .., N_x - 2;\ \hat{d}_{N_x-1} = -\frac{h^{\hat{\alpha}^{(i)}} \hat{\lambda}_{1+N_x}}{\tau^{\hat{\gamma}^{(i)}}}.$$

Теорема 2 (Достаточное условие сходимости итерационной процедуры (9))**.** *Пусть вектор оценок коэффициентов ЛПДМ $\hat{\lambda}$ может быть представлен как решение следующего уравнения:*

$$\hat{\lambda} = q\left(\hat{\lambda}\right), \tag{10}$$

причём функции $q_i\left(\hat{\lambda}\right)$ и $\dfrac{\partial q_i\left(\hat{\lambda}\right)}{\partial \hat{\lambda}_j}$, $i,\ j = 1, 2, .., n$, определены и непрерывны в известной замкнутой области Γ_0 действительного n-мерного пространства E^n, и в области Γ_0 выполняется неравенство

$$\beta = \max_{\hat{\lambda} \in \Gamma_0} \left(\max_{i=1,2,..,n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} \left| \frac{\partial g_{ik}}{\partial \hat{\lambda}_j} e_k - g_{ik} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f_{ks}}{\partial \hat{\lambda}_j} \hat{\lambda}_s \right| \left\| \left(F_{\hat{\lambda}}^T \Omega_{\hat{\lambda}}^{-1} F_{\hat{\lambda}} \right)^{-1} \right\| \right) < 1,$$

где g_{ik} — элементы матрицы $G(\hat{\lambda}) = F^T(\hat{\lambda})\Omega^{-1}(\hat{\lambda})$ размера $n \times (N_x N_t)$, n — размерность вектора $\hat{\lambda}$, $e = b - F\hat{\lambda}$ — вектор остатков, $\dfrac{\partial f_{ks}}{\partial \hat{\lambda}_j} = \dfrac{\partial f_{ks}}{\partial \hat{\alpha}} \dfrac{\partial \hat{\alpha}}{\partial \hat{\lambda}_j} + \dfrac{\partial f_{ks}}{\partial \hat{\gamma}} \dfrac{\partial \hat{\gamma}}{\partial \hat{\lambda}_j}$. Тогда, если последовательные приближения

$$\hat{\lambda}^{(k)} = q\left(\hat{\lambda}^{(k-1)}\right),\ k = 1, 2, ... \tag{11}$$

не выходят из области Γ_0: $\hat{\lambda}^{(k)} \in \Gamma_0$, то: (а) при любых начальных приближениях $\gamma^{(0)}$ и $\alpha^{(0)}$: $\hat{\lambda}^{(1)} = \hat{\lambda}(\gamma^{(0)}, \alpha^{(0)}) \in \Gamma_0$ итерационный процесс (11) сходится, то есть существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} \hat{\lambda}^{(k)} = \bar{\lambda}$; (б) предельный вектор $\bar{\lambda}$ является единственным решением уравнения (10) в области Γ_0; (в) имеет место оценка

$$\left\|\bar{\lambda} - \hat{\lambda}^{(k)}\right\| \leq \frac{\beta}{1-\beta}\left\|\hat{\lambda}^{(k)} - \hat{\lambda}^{(k-1)}\right\|.$$

В пятой главе описан алгоритм вычисления погрешности оценивания параметров дробного дифференциального оператора, приведены результаты численных исследований погрешности разработанных методов параметрической идентификации и сравнения погрешностей оценивания предложенных методов, проанализированы границы применения каждого метода.

В п. 5.1 описан метод оценивания погрешности, основанный на вычислении среднеквадратичного отклонения модели от экспериментальных данных, смещения оценки, а также доверительного интервала, границы которого определяют предельную абсолютную погрешность с заданной доверительной вероятностью.

В п. 5.2 приведены результаты численных исследований погрешности оценивания каждого метода, проводится сравнение методов; анализируются и описываются границы практического применения каждого метода.

На основе полученных результатов численных исследований сделаны выводы, что

(а) в случае известного порядка дробного дифференциального оператора предпочтительно использовать методы, основанные на построении аппроксимационных решений: в случае $\mu > 0$ наиболее эффективен метод, в основе которого лежит асимптотическое разложение и среднеквадратичное оценивание параметров этого разложения (раздел 2.2); в случае $\mu < 0$ предпочтительнее использовать метод, в основе которого лежит процедура минимизации невязки (раздел 2.3) либо предельного перехода (раздел 2.4);

(б) в случае, если порядок дробного дифференциального оператора неизвестен, рекомендовано использовать метод на основе разностных схем, описанный в главе 3, который включает применение новой итерационной процедуры;

(в) при использовании математической модели процесса аномальной диффузии и аналогичных случаев, когда точное аналитическое решение дифференциального уравнения с дробными производными неизвестно, рекомендовано применять подход, основанный на численном представлении дробного дифференциального оператора (глава 4).

В шестой главе представлено разработанное программное обеспечение, реализующее новые численные методы определения параметров процессов, описываемых при помощи дифференциальных уравнений с дробными производными, и позволяющее получать оценки параметров исследуемой системы и погрешность оценивания на основании введённой информации о результатах эксперимента.

В п. 6.1 описаны блок-схема и алгоритм реализации предложенных методов параметрической идентификации, рассмотрен пользовательский интерфейс программы. Алгоритм выбора метода идентификации основывается на рекомендациях, изложенных в главе 5.

В п. 6.2 описывается работа программы и приводятся результаты расчёта в численном и графическом виде.

В Заключении представлены основные результаты диссертационной работы:

1. Построены новые аппроксимации решений дифференциальных уравнений дробного порядка, позволяющие разработать процедуру идентификации параметров процессов, описываемых при помощи дробно-дифференциальных уравнений.

2. Построены новые математические линейно-параметрические дискретные модели, связывающие в форме стохастических разностных уравнений результаты экспериментальных данных процессов, описываемых дифференциальными уравнениями с дробными производными.

3. Разработаны новые методы параметрической идентификации систем, описываемых дифференциальными уравнениями дробного порядка вида (1), (2), на основе среднеквадратичного оценивания коэффициентов стохастического разностного уравнения; описаны алгоритмы данных методов.

4. Получены формулы, связывающие параметры дробного дифференциального оператора, аппроксимирующих моделей и коэффициенты разностного уравнения. Приведены оценки параметров решения дробного дифференциального уравнения на основе применения аппроксимирующих моделей.

5. Сформулированы и доказаны теоремы о сходимости новых итерационных процедур численного метода определения параметров дробных дифференциальных операторов, проведены численные исследования сходимости предложенных итерационных процедур.

6. Проведены численно-аналитические исследования погрешности оценивания в зависимости от величины случайной помехи, объёма выборки и периода дискретизации. Выполнен анализ применимости предложенных методов и сравнительный анализ их результатов.

7. Разработано программное обеспечение, реализующее алгоритмы вычисления параметров системы, описываемой дифференциальными уравнениями дробного порядка, на основе среднеквадратичного оценивания коэффициентов разностных уравнений.

Список публикаций

1. Зотеев, В. Е. Параметрическая идентификация специального уравнения Рикатти на основе стохастических разностных уравнений / В.Е. Зотеев, А.С. Овсиенко // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2008. — №1(16). — С.171–184 (из перечня ВАК).

2. Овсиенко, А. С. Параметрическая идентификация задачи типа Коши для одного дробного дифференциального уравнения / А.С. Овсиенко // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2012. — №1(26). — С.157–165 (из перечня ВАК).

3. Овсиенко, А. С. Идентификация параметров процесса аномальной диффузии на основе разностных уравнений / А.С. Овсиенко // Вычислительные технологии. — 2013. — Т.18 №1. — С.65–73 (из перечня ВАК).

4. Овсиенко, А. С. Разработка методов идентификации параметров дифференциальных уравнений с дробной производной Римана – Лиувилля / А.С. Овсиенко // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2014. — №1(34). — С.134–144 (из перечня ВАК).

5. Овсиенко, А. С. Программа для определения параметров дифференциальных операторов на основе разностных уравнений "Estimation"/ А.С. Овсиенко. — Роспатент. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2013619694 от 14.10.2013.

6. Овсиенко, А. С. Построение стохастических разностных уравнений для параметрической идентификации систем, описываемых специальным уравнением Риккати / А.С. Овсиенко, В.Е. Зотеев // Труды 3-го Международного форума (8-й Международ. конф. молодых ученых и студентов). Естественные науки. Части 1-2: Математика. Математическое моделирование. — Самара: СамГТУ, 2007. — С.162–167.

7. Овсиенко, А. С. Построение стохастических разностных уравнений для параметрической идентификации систем, описываемых специальным уравнением Риккати / А.С. Овсиенко, В.Е. Зотеев // Тезисы докладов XXXIV Самарской областной студенческой научной конференции. Часть 1. — Самара: СамГТУ, 2008. — С.115.

8. Зотеев, В. Е. Параметрическая идентификация систем, описываемых специальным уравнением Риккати, на основе стохастических разностных уравнений / В.Е. Зотеев, А.С. Овсиенко // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды Пятой Всероссийской научной конференции с международным участием. Часть 4. — Самара: СамГТУ, 2008. — С.71–79.

9. Овсиенко, А. С. Достаточное условие сходимости итерационной процедуры среднеквадратичного оценивания коэффициентов стохастического разностного уравнения / А.С. Овсиенко, В.Е. Зотеев // Актуальные проблемы современной науки: Труды 4-го Международного форума (9-й Международ. конф. молодых ученых и студентов). Естественные науки. Части 1–3: Математика. Математическое моделирование. Механика. — Самара: СамГТУ, 2008. — С.114–120.

10. Зотеев, В. Е. Параметрическая идентификация дробных осцилляторов на основе разностных уравнений / В.Е. Зотеев, А.С. Овсиенко // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды Шестой Всероссийской научной конференции с международным участием. Часть 4. — Самара: СамГТУ, 2009. — С.61–68.

11. Овсиенко, А. С. Математическое моделирование пластовых систем и их параметрическая идентификация / А.С. Овсиенко, В.И. Попков // Тр. СамараНИПИнефть. — 2012. — Выпуск 2. — С.120–127.

12. Овсиенко, А. С. Определение параметров дробной динамической модели с двумя дробными производными на основе разностного уравнения / А.С. Овсиенко // Тезисы докладов Международной научной молодёжной конференции по естественнонаучным и техническим дисциплинам. — Йошкар-Ола: МарГТУ, 2009. — С. 89.

13. Овсиенко, А. С. Разработка и исследование стохастических разностных уравнений для процессов, описываемых дифференциальными уравнениями с дробными производными / А.С. Овсиенко // Тезисы докладов XXXV Самарской областной студенческой научной конференции. Часть 1. — Самара: СамГТУ, 2009. — С.144.

14. Овсиенко, А. С. Построение разностных уравнений для параметрической идентификации систем, содержащих дробные дифференциальные операторы / А.С. Овсиенко // Актуальные проблемы современной науки: Труды 5-го Международного форума (10-й Международ. конф. молодых учёных и студентов). Естественные науки. Части 1–3: Математика. Математическое моделирование. Механика. — Самара: СамГТУ, 2010. — С.156–161.

15. Овсиенко, А. С. Решение задачи параметрической идентификации фрактальных осцилляторов порядка (0,1) на основе разностных уравнений / А.С. Овсиенко // Тезисы докладов Международной научной молодёжной конференции по естественнонаучным и техническим дисциплинам. — Йошкар-Ола: МарГТУ, 2010. — С.27–28.

16. Овсиенко, А. С. Построение линейно-параметрических дискретных моделей для параметрической идентификации фрактальных осцилляторов / А.С. Овсиенко // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды Седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Часть 4. — Самара: СамГТУ, 2010. — С.152–156.

17. Овсиенко, А. С. Применение математического моделирования для решения задачи определения параметров дробных дифференциальных операторов / А.С. Овсиенко // Тезисы докладов XVII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам. — Алушта: МАИ-ПРИНТ, 2011. — С.135–137.

18. Овсиенко, А. С. Разработка метода идентификации параметров дробного дифференциального оператора / А.С. Овсиенко // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды Восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Часть 2. — Самара: СамГТУ, 2011. — С.195–201.

19. Овсиенко, А. С. Разработка численного метода оценивания параметров дифференциального уравнения дробного порядка / А.С. Овсиенко // Тезисы докладов XII Всероссийской конф. молодых учёных по мат. моделированию и информационным технологиям. — Самара: СамГТУ, 2011. — С.22.

20. Овсиенко, А. С. Метод параметрической идентификации процесса аномальной диффузии на границе застойной зоны и области радиального стока скважины / А.С. Овсиенко // Тезисы докладов V научно-практ. конф. по мат. моделированию и компьютерным технологиям в процессах разработки месторождений. — М: Нефтяное хозяйство, 2012. — С.37.

Подписано в печать 29.08.2014. Формат 60 х 84 1/16.
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 1.
Тираж 100 экз. Заказ № 963.
ФГБОУ ВПО "Самарский государственный технический университет"
Отдел типографии и оперативной печати
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.