На правах рукописи

Должковой Алексей Александрович

РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ПОЛЗУЧЕСТИ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД И ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Самара – 2005

Работа выполнена в Самарском государственном техническом университете

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор Радченко Владимир Павлович

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук,
профессор Ташкинов Анатолий Александрович,
доктор физико-математических наук, профессор Сараев Леонид Александрович

Ведущая организация
Институт Гидродинамики СО РАН (г. Новосибирск)

Защита состоится «__» ноября 2005 г. в ___ часов на заседании диссертационного совета Д.212.218.06 при Самарском государственном университете по адресу: 443011, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1, зал заседаний

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Самарского государственного университета

Автореферат разослан «___» октября 2005 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Глущенков В.С.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Постоянно растущие требования к надежности и прочности элементов конструкций приводят к необходимости учета структурной неоднородности реономного материала, которой обладают все реально существующие среды и тела. Структурная неоднородность материала существенно влияет на процесс деформирования и разрушения твердых реологических тел, она вызывает ряд механических эффектов, которые не могут быть описаны в рамках классических детерминированных теорий. Это свидетельствует о необходимости применения вероятностно-статистических методов при исследовании процессов неупругого реологического деформирования, построении соответствующих физических соотношений для материалов и разработке аналитических методов решения стохастических краевых задач ползучести.

Аналитические методы решения краевых задач для структурно-неоднородных материалов хорошо разработаны для физически и стохастически линейных задач теории упругости. В условиях ползучести разработка аналитических методов решения стохастических краевых задач сталкивается с серьезными трудностями, основными из которых являются физическая и стохастическая нелинейности. Поэтому для структурно-неоднородных реономных сред решены лишь простые задачи, допускающие линеаризацию, причем эти решения получены лишь для первого приближения на основе теории установившейся ползучести.

Аналитические методы решения стохастических краевых задач с учетом накопления поврежденности и третьей стадии ползучести вообще не разработаны.

Вышеизложенное определяет актуальность диссертационного исследования и позволяет сформулировать цель настоящей работы.

Целью работы являлась разработка аналитических методов решения одномерных и двухмерных стохастических краевых задач с учетом эффектов ползучести и накопления поврежденности на основе метода малого параметра в корреляционном приближении и их применения к оценке показателей надежности элементов конструкций из структурно-неоднородных материалов.

Научная новизна работы заключается в следующем:

1) выполнен статистический анализ существующих экспериментальных данных и обоснован аналитический вид корреляционной функции для деформаций ползучести и пластичности;

2) разработан аналитический метод решения одномерных стохастических краевых задач установившейся ползучести для случая плоского деформированного состояния в полярной системе координат на основе метода малого параметра с учетом второго и третьего членов приближения;

3) разработан аналитический метод решения двухмерных стохастических краевых задач с учетом эффектов ползучести, накопления поврежденности и разрушения на основе метода линеаризации и спектрального представления случайных функций;

4) разработаны методики определения показателей надежности элементов конструкций из структурно-неоднородных реономных материалов на основе аналитических методов решения стохастических краевых задач;

5) выполнен ряд новых расчетных исследований по анализу влияния параметров реологических моделей сред, степени неоднородности материала и внешних силовых воздействий на статистические оценки случайных полей напряжений, деформаций и перемещений.

Практическая значимость работы заключается в разработке аналитических методов решения краевых задач для структурно-неоднородного материала на основе методов линеаризации стохастической нелинейности, что является, с одной стороны, важным вкладом в дальнейшее развитие соответствующего раздела механики деформируемого твердого тела. С другой стороны, разработанные методики определения показателей надежности элементов конструкций из структурно-неоднородных материалов на основе аналитических методов решения стохастических краевых задач позволяют научно-обоснованно подходить к проблеме назначения ресурса элементов конструкций в условиях ползучести материала.

Обоснованность выносимых на защиту научных положений, выводов и рекомендаций, а также достоверность полученных результатов исследований подтверждается:

- адекватностью имеющихся модельных представлений физической картине исследуемых стохастических процессов в условиях ползучести материала;
- корректностью использования математического аппарата, законов механики деформируемого твердого тела, положений теорий дифференциальных уравнений и случайных функций;
- численным исследованием сходимости построенных аналитических решений и частичной проверкой экспериментальных и расчетных данных.

На защиту выносятся:

1) результаты комплексного расчетно-экспериментального исследования на основе корреляционного анализа одномерных полей деформаций ползучести и пластичности (для сплава АД-1)

2) аналитический метод решения одномерных стохастических краевых задач установившейся ползучести для случая плоского деформированного состояния в полярной системе координат на основе метода малого параметра;

3) аналитический метод решения двухмерных стохастических краевых задач с учетом эффектов ползучести и накопления поврежденности на основе метода линеаризации и спектрального представления случайных функций;

4) методики определения показателей надежности конструкций из структурно-неоднородных реономных материалов на основе аналитических методов решения стохастических краевых задач;

5) качественные, количественные и экспериментальные результаты, полученные при построении моментных функций случайного процесса, решении стохастических краевых задач и оценке надежности элементов конструкций в условиях ползучести.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и списка использованных источников из 156 названий. Работа содержит 172 страницы основного текста.

Апробация работы. Результаты научных исследования опубликованы в 12 печатных работах и докладывались на одиннадцатой и тринадцатой межвузовских конференциях «Математическое моделирование и краевые задачи» (г. Самара, 2001-2003 гг.), на Второй Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи» (г. Самара, 2005 г), на Пятой Международной конференции молодых ученых «Актуальные проблемы современной науки» (г. Самара, 2004 г.); на Третьем Всероссийском семинаре им. С.Д. Волкова «Механика микронеоднородных материалов и разрушение» (г. Екатеринбург, 2004 г.), на Четырнадцатой Зимней Школе по механике сплошных сред (г. Пермь, 2005 г.); на научном семинаре «Механика и прикладная математика» Самарского государственного технического университета (рук. проф. В.П. Радченко, 2002-2005 г.г.); на научном семинаре «Актуальные проблемы механики» Самарского государственного университета (рук. проф. В.И. Астафьев, 2005 г.).

Работа выполнялась в рамках межвузовского плана госбюджетных НИР по научному направлению «Механика», утвержденного Министерством образования РФ на 1998-2003 г.г. (тема «Надежность механических систем в промышленности, энергетике и на транспорте»), тематического плана НИР СамГТУ (тема «Разработка методов математического моделирования динамики и деградации процессов в механике сплошных сред, технических, экономических, биологических и социальных системах и методов решения неклассических краевых задач и их приложений»), а также в рамках гранта РФФИ (проект № 03-01-00448а).

Благодарности. Автор выражает благодарность научному руководителю профессору, д.ф.-м.н. В.П. Радченко и научному консультанту доценту, к.ф.-м.н. Н.Н. Попову за постановки задач и постоянное внимание к работе.

Краткое содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, определяются цели исследований, излагаются научная новизна и практическая значимость работы, формулируются основные положения, выносимые на защиту, приводятся сведения об апробации работы и публикациях.

Глава 1. Аналитический обзор и постановка задачи.

В **главе 1** дан краткий обзор литературы по научным проблемам, близким к теме диссертационной работы, и посвященной вопросам анализа экспериментальных исследований стохастических полей реологической деформации, существующих подходов построения феноменологических стохастических моделей для реономных структурно-неоднородных материалов, методов решения стохастических краевых задач ползучести и их приложений к оценке показателей надежности.

Рассматриваются постановки стохастических краевых задач в механике деформируемого твердого тела, основы которых заложены В.В. Болотиным, А.А. Ильюшиным, В.А. Ломакиным, Ю.П. Самариным и другими авторами. Отмечается, что наиболее общим является случай, когда случайные функции задаются многоточечными плотностями распределения вероятностей (работы В.В. Болотина, В.А. Ломакина, А.А. Свешникова и других). Однако их построение зачастую (особенно в области ползучести материала, из-за наличия фактора времени) затруднительно из-за малого объема экспериментального материала. Указывается, что большинство стохастических краевых задач и задач надежности решены при значительно меньшей статистической информации о случайных функциях, которые могут быть описаны многоточечными моментами до определенного порядка, при этом ограничиваются нахождением первых двух моментных функций – математического ожидания и корреляционной функции (работы В.В. Болотина, В.А. Ломакина, В.А. Кузнецова, Н.Н.Попова, Ю.П. Самарина, З.Г. Тунгузковой и других).

Отмечается, что наиболее распространенным методом решения стохастических краевых задач является метод возмущений (метод малого параметра). Он нашел применение в работах А.Н. Гузя, Л.В. Ершова, Д.Д. Ивлева, В.Д. Кубенко, Д. Коула, Ю.Н. Немиша, К.И. Шнеренко, Н.А. Шульги, А.А. Шваба, И.Ю. Цвелодуба, M. Kaminski, Yang Haitian, Guo Xinglin и других авторов.

Для случая стохастически неоднородной линейно упругой среды метод возмущений развивался в работах В.В. Болотина и В.А. Ломакина. Однако этот подход связан с трудностями математического характера. Поэтому при решении конкретных задач в большинстве случаев ограничиваются лишь первым приближением (работы З.В. Амелина, Н.В. Архипова, А.А. Газганова, В.А. Ломакина, Б.П. Макарова, В.Н. Наумова, В.В. Подалкова, В.В. Петрова, В.А. Романова, Г.В. Тихонькова, В.И. Шейнина и других авторов).

Единичные попытки применения метода возмущений для решения стохастических краевых задач ползучести в первом приближении были предприняты В.А. Кузнецовым, Н.Н. Поповым, В.П. Радченко, Ю.П. Самариным. Однако первого приближения в ряде задач крайне недостаточно, и необходимо развивать методы решения с учетом членов более высокого порядка.

Поскольку одним из элементов постановки стохастических краевых задач ползучести являются стохастические физические уравнения для среды, то большее внимание уделено вопросу построения стохастических моделей. Отмечается что стохастические реологические модели строятся на основе обобщения соответствующих детерминированных теорий. Здесь отмечаются работы В.И. Астафьева, А.Н. Бадаева, В.В. Болотина, Б.В. Горева, Ю.И. Кадашевича, Л.М. Качанова, Я.М. Клебанова, В.И. Ковпака, В.Л. Колмогорова, Г.Ф. Лепина, А.Ф. Никитенко, В.В. Новожилова, А.М. Локощенко, Н.Н. Малинина, Ю.Н. Работнова, Ю.Н. Радаева, В.П. Радченко, Ю.П. Самарина, О.В. Соснина, С.А. Шестерикова, И.Ю. Цвелодуба, J.A. Betten, J.T. Boyle, F.A. Leckie, J. Spence и многих других авторов.

Выделен класс задач, в которых строятся модели, отражающие закритическое неупругое деформирование и разрушения материала, и разрабатываются методы решения соответствующих краевых задач. Решению этой проблемы посвящены работы В.Э. Вильдемана, В.Л. Каткова, В.Д. Клюшникова, А.А. Лебедева, Е.В. Небогиной, В.И. Миронова, В.П. Радченко, Ю.В. Соколкина, В.В. Стружанова, А.А. Ташкинова, Р.Г. Шина и других.

Проанализированы существующие методики и алгоритмы оценки показателей надежности элементов конструкций в условиях ползучести по детерминированным, силовым и катастрофическим критериям отказа.

По результатам литературных данных сформулированы основные задачи диссертационной работы.

Глава 2. Анализ экспериментальных стохастических полей неупругих реологических микродеформаций и обоснование выбора аналитической аппроксимации для корреляционной функции.

В связи с тем, что основной информацией в развиваемом в диссертации методе решения стохастических краевых задач является корреляционная функция, то **глава 2** посвящена «экспериментальному» обоснованию аналитической зависимости для нее. Для этой цели использовались данные работы В.П. Радченко, С.А. Дудкина, М.И. Тимофеева[1], где были выполнены комплексные экспериментальные исследования и анализ распределения по длине одноосного образца пластической деформации и деформации ползучести сплава АД-1 при $T = 26^\circ C$ в процессе его деформирования вплоть до разрушения, включая чередование упругопластического деформирования и деформирования с выдержками во времени (ползучесть).

Стохастический анализ экспериментальных данных позволил сделать, в частности, вывод, что для описания распределения полей неупругой деформации (того и другого типа) по пространственной координате (вдоль образца) при фиксированном напряжении и времени может быть использована следующая структура случайной функции для деформаций:

$$b(x) = b_0\left[1 + aU(x)\right], \tag{1}$$

где $U(x)$ – случайная функция, описывающая стохастическую неоднородность материала, вероятностные характеристики которой известны: $\left\langle U \right\rangle$=0, $\left\langle U^2 \right\rangle$=1; a – коэффициент вариации механических свойств ($0 < a < 1$); $b_0 = \left\langle b \right\rangle$ – постоянная материала; $\left\langle \cdot \right\rangle$ – символ математического ожидания.

Используемые при численном и аналитическом решениях методы базируются на аналитическом представлении корреляционной функции для функции $U(x)$ в виде

$$K_U(r) = e^{-g|r|}(\cos br \ + \frac{g}{b}\sin b\left|r\right|), \tag{2}$$

где g , b – постоянные величины, определяемые по опытным данным из условий наилучшей аппроксимации ($g > 0$), $r = x_2 - x_1$ – расстояние между пространственными переменными.

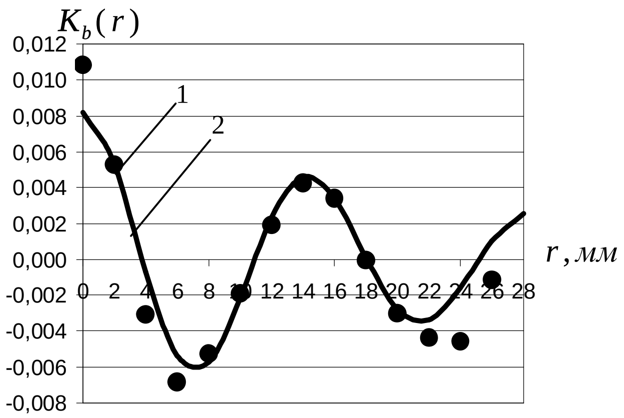
Очевидно, что корреляционная функция $K_U(r)$ связана с ковариационной функцией $K_b(r)$ для случайной функции $b(x)$ следующим соотношением:

$$K_b(r) = b_0^2 a^2 K_U(r). \tag{3}$$

Таким образом, установление вида корреляционной функции $K_U(r)$ в форме (2) равносильно установлению вида для функции $K_b(r)$ в форме (3). Аналогичные выводы справедливы и для деформации пластичности.

На рисунке приведена типичная картина для функции $K_b(r)$ для деформации ползучести (ступень нагружения № 6, образец № 123[1]).

[1] Радченко В.П., Дудкин С.А., Тимофеев М.И. Экспериментальное исследование и анализ полей неупругих микро- и макродеформаций сплава АД-1 // Вестник СамГТУ. Серия: Физ.-мат. науки. Вып. 16. Самара: СамГТУ, 2002. С. 111-117.



«Экспериментальная» (1) и «теоретическая» (2) зависимости для корреляционной функции $K_b(r)$

Таким образом, выполненные в **главе 2** исследования позволяют сделать вывод о приемлемости гипотезы (2) о виде корреляционной функции для микродеформации пластичности и ползучести, а значит и для случайной функции $U(x)$ в (1).

Глава 3. Решение стохастической краевой задачи установившейся ползучести толстостенной трубы методом малого параметра.

В **главе 3** решается физически и статистически нелинейная краевая задача о ползучести толстостенной трубы под действием внутреннего давления q для случая плоского деформированного состояния ($e_z(r,t)=0$ или $\dot{e}_z(r,t)=0$). При этом задача рассматривается в цилиндрических координатах в предположении, что стохастические неоднородности материала оболочки трубы описываются функцией одной переменной (радиуса r). Компоненты тензора деформаций и тензора напряжений будут также случайными функциями только радиуса r.

В **пункте 3.1** приведена постановка задачи. В качестве определяющих соотношений для деформации ползучести e_r и e_j выбраны, в соответствии с теорией вязкого течения, следующие реологические соотношения в стохастической форме:

$$\dot{e}_r = cs^{n-1}\overline{s}_r[1+aU(r)], \quad \dot{e}_j = cs^{n-1}\overline{s}_j[1+aU(r)], \tag{4}$$

где s – интенсивность, а $\overline{s}_r$, $\overline{s}_j$ – компоненты девиатора напряжений; $\langle U \rangle$=0, $\langle U^2 \rangle$=1; a – коэффициент вариации механических свойств ($0< a <1$); c, n – постоянные материала.

Кроме уравнений (4), в основную систему уравнений входят уравнения равновесия, совместности деформаций и граничные условия $s_r(a)=-q$, $s_r(b)=0$, где a и b – внутренний и наружный радиусы трубы.

В **пункте 3.2** приведено решение задачи, для получения которого используется метод разложения радиального напряжения s_r по малому параметру a:

$$s_r = s_{r0} + \sum_{k=1}^{\infty} a^k s_{rk}, \quad \langle s_r \rangle = s_{r0}, \tag{5}$$

где s_{r0} – решение аналогичной детерминированной задачи.

После подстановки (5) в основную систему уравнений задача сводится к системе уравнений относительно s_{r0}, s_{rk} разложения (5), полученных при одинаковых степенях a. Найден рекуррентный вид такой системы. При анализе решения ограничимся k=3, то есть задачей, учитывающей только члены a^0, a^1, a^2, a^3, и пренебрегающей членами, содержащими a^k ($k \geq 4$). Последовательным интегрированием уравнений системы получены соответствующие выражения для s_{ri} $(i = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$.

Далее по (4) вычислены поля скоростей деформаций $\dot{e}_r$, $\dot{e}_j$ и перемещений $u(t)$.

В **пункте 3.3** приведено вычисление основных статистических характеристик полей напряжений, деформаций и перемещений, полученных в пункте 3.2.

В силу сложности вычислений в диссертационной работе выполнено вычисление дисперсий полей напряжений, деформаций и перемещений лишь до третьего члена приближения. В результате было получено, что статистические средние $M[\dot{e}_r]$, $M[\dot{e}_j]$, $M[u(t)]$ выражаются через моменты $\left\langle H_1^2 \right\rangle$, $\left\langle H_2 \right\rangle$, а дисперсии $D[\dot{e}_r]$, $D\left[\dot{e}_j\right]$, $D[u(t)]$ выражаются через дисперсии $D[H_1]$, $D\left[H_1^2\right]$, $D[H_2]$, $D[H_3]$, $D[H_1 H_2]$, $D\left[H_1^3\right]$ и центральные моменты $\left\langle \overset{0}{H}_1 \overset{0}{H}_3 \right\rangle$, $\left\langle \overset{0}{H}{}_1^2 \overset{0}{H}_2 \right\rangle$, $\left\langle \overset{0}{H}{}_1^4 \right\rangle$, $\left\langle \overset{0}{H}_1 \overset{0}{H}_2 \overset{0}{H}_3 \right\rangle$, $\left\langle \overset{0}{H}{}_1^3 \overset{0}{H}_3 \right\rangle$, $\left\langle \overset{0}{H}{}_1^4 \overset{0}{H}_2 \right\rangle$, где $\langle\cdot\rangle$ и $M[\,\cdot\,]$ – символы математического ожидания, $D[\,\cdot\,]$ - символ для обозначения дисперсии, $H_k = BI_k(b)$ $(k = 1,2,3)$, $B = \dfrac{1}{a^{-\frac{2}{n}} - b^{-\frac{2}{n}}}$, $I_k(r) = \int\limits_a^r U^k(x) x^{-1-\frac{2}{n}} dx$ $(k = 1,2,3)$.

При этом для нормального закона распределения моменты нечетных порядков равны нулю, а центральные моменты четных порядков выражаются через моменты второго порядка. Например, центральные моменты четвертого порядка вычисляются по формуле:

$$\left\langle I_1^0 I_2^0 I_3^0 I_4^0 \right\rangle = k_{12}k_{34} + k_{13}k_{24} + k_{14}k_{23},$$

где I_i^0 – центрированные случайные величины, k_{ij} – моменты второго порядка.

В итоге все входящие в полученные соотношения моменты выражаются через функции, зависящие от корреляционной функции.

В **пункте 3.4** проведен численный анализ стохастических полей деформаций в толстостенной трубе. Для аппроксимации корреляционной функции выбрано выражение (2) со следующими численными значениями параметров: $g = 10$, $b = 20$.

Численные расчеты, выполненные для толстостенной трубы с внутренним и наружным радиусами соответственно $a = 1$, $b = 2$, показали, что дисперсии приведенных скоростей деформаций $D\left[\dfrac{\dot{\varepsilon}_r}{cq^n}\right]$ и $D\left[\dfrac{\dot{\varepsilon}_\varphi}{cq^n}\right]$ с увеличением показателя нелинейности n, а также и с увеличением степени неоднородности материала α увеличиваются, причем наибольшие значения дисперсий наблюдаются вблизи внутренней поверхности трубы, а наименьшие – в окрестности наружной поверхности трубы.

Полученные результаты дают основание утверждать, что в рассматриваемом примере для слабонеоднородных материалов ($\alpha = 0{,}1 \div 0{,}2$) значения дисперсий скоростей деформаций для первых трех приближений отличаются незначительно. Для материалов с большой степенью неоднородности ($\alpha = 0{,}4 \div$

$0{,}5$) значения дисперсий скоростей деформаций, вычисленные с учетом третьего приближения, могут превосходить соответствующие значения, вычисленные по двум приближениям, в полтора раза, а вычисленные по первому приближению – в два раза. Поэтому в рассматриваемой задаче неучет членов второго и третьего порядков малости может привести к необоснованному завышению показателей прочности и надежности толстостенной трубы.

В **пункте 3.5** предложена методика оценки надежности толстостенной трубы на основе полученного решения стохастической краевой задачи установившейся ползучести, приведены примеры расчетов надежности для конкретных геометрических параметров трубы, заданных характеристик материала и коэффициента вариации механических свойств a .

Разработанный в **главе 3** метод приближенного аналитического решения нелинейной стохастической краевой задачи в условиях нелинейной установившейся ползучести позволяет уточнить существующие модели и эффективно решать проблему оценки надежности цилиндрических элементов конструкций в вероятностной постановке.

Глава 4. Решение нелинейной стохастической задачи о ползучести неоднородной плоскости. В **главе 4** развиваются идеи, примененные в главе 3, для решения двухмерной краевой задачи установившейся ползучести на примере двухосного растяжения плоскости из стохастически неоднородного материала. При этом рассматриваются следующие две основные задачи:

1) материал среды удовлетворяет теории установившейся ползучести (без учета накопления поврежденности и третьей стадии ползучести);

2) материал среды удовлетворяет теории установившейся ползучести, но учитывается накопление поврежденности в материале и третья стадия ползучести.

В **пункте 4.1** рассмотрена постановка обеих задач. Среда считается стохастически неоднородной, так что тензоры напряжений и деформаций являются случайными функциями координат x_1, x_2. Компоненты тензора номинальных напряжений $\overline{s}_{ij}$ удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\overline{s}_{ij,j} = 0, \quad (i, j = 1,2,3), \tag{6}$$

а компоненты тензора скоростей деформаций $\dot{p}_{ij}$ – условиям

$$\Lambda_{ij}\Lambda_{kl}\dot{p}_{jk,il} = 0, \tag{7}$$

которые получаются из уравнений совместности для деформаций путём дифференцирования по времени, $\Lambda_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ – единичный антисимметричный псевдотензор. Уравнения (6) и (7) замыкаются определяющим соотношением, которое принимается в соответствии с нелинейной теорией вязкого течения (установившейся ползучести), имеющим следующий вид:

$$\dot{p}_{ij} = cs^{n-1}\left(s_{ij} - \frac{1}{3}d_{ij}s_{mm}\right)\left[1 + aU\left(x_1, x_2\right)\right], \tag{8}$$

где s – интенсивность напряжений: $s^2 = \frac{1}{2}\left(3s_{ij}s_{ij} - s_{ii}s_{jj}\right)$; c, n, a – постоянные материала; $U\left(x_1, x_2\right)$ – случайная однородная функция, описывающая реологические свойства материала, с математическим ожиданием $\langle U \rangle = 0$ и дисперсией $\langle U^2 \rangle = 1$, s_{ij} – истинные напряжения.

Для обобщения определяющих соотношений (8) на случай учета третьей стадии ползучести используется энергетический вариант теории установившейся ползучести, согласно которому в уравнения (8) вместо номинальных напряжений $\overline{s}_{ij}$ вводятся истинные напряжения s_{ij}, связанные с номинальными соотношением

$$s_{ij} = \overline{s}_{ij}(1+w), \tag{9}$$

где $w = w(t, x_1, x_2)$ - скалярный параметр поврежденности, характеризующий накопление поврежденности в материале (в каждой точке материала) вследствие ползучести с течением времени и удовлетворяющий соотношению:

$$\dot{w} = b\left(1 + b\,H(x_1, x_2)\right) s_{ij}\,\dot{p}_{ij}. \tag{10}$$

Здесь b - постоянная материала, $H(x_1, x_2)$- случайная однородная функция, описывающая стохастическую повреждаемость материала, с математическим ожиданием $\langle H \rangle = 0$ и дисперсией $\langle H^2 \rangle = 1$. Соотношения (6) - (10) при соответствующих краевых условиях задают стохастическую задачу ползучести, которая в дальнейшем решается относительно напряжений s_{ij} и скоростей деформаций $\dot{p}_{ij}$. Очевидно, что эти соотношения при $w = 0$ задают первую из сформулированных задач, а при $w \neq 0$ – вторую задачу. Поставленная задача является физически и статистически нелинейной, в связи с чем строится ее приближенное решение на основе линеаризации в окрестности детерминированного решения.

В **пункте 4.2** приводится решение стохастической задачи установившейся ползучести для неравномерного растяжения плоскости ($s^0_{11} = s^0, s^0_{22} = hs^0$, h - параметр) без учета поврежденности материала ($w = 0$, $s_{ij} = \overline{s}_{ij}$). При решении используется представление тензора напряжений в виде суммы детерминированного слагаемого s^0_{ij} и флуктуации s^*_{ij}:

$$s_{ij} = s^0_{ij} + s^*_{ij}, \quad \langle s^0_{ij} \rangle = s^0_{ij}, \quad \langle s^*_{ij} \rangle = 0. \tag{11}$$

После выражения $\dot{p}_{ij}$ через эти слагаемые и проведения линеаризации, из уравнения совместности деформаций получено выражение:

$$\begin{gathered} s^*_{11,22}(2 + k_1 l_1) + s^*_{22,22}(-1 + k_1 l_2) + s^*_{11,11}(-1 + k_2 l_1) + \\ + s^*_{22,11}(2 + k_2 l_2) - 6 s^*_{12,12} = -a\left(U_{,22} l_1 + U_{,11} l_2\right), \end{gathered} \tag{12}$$

где $k_i = \dfrac{(n-1) l_i}{2 s_0^2}$, $l_1 = 2 s^0_{11} - s^0_{22}$; $\quad l_2 = 2 s^0_{22} - s^0_{11}$.

При решении предполагалось, что функция $U(x_1, x_2)$, с помощью которой задается случайное поле возмущений механических свойств материала, является однородной и изотропной, и следовательно она допускает спектральное представление в виде интеграла Фурье – Стилтьеса:

$$U\left(x_1,x_2\right)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{iw_k x_k}dy\ \left(w_1,w_2\right), \tag{13}$$

причем для случайного дифференциала $dy\ \left(w_1,w_2\right)$ выполняется условие стохастической ортогональности:

$$\left\langle dy\ \left(w_1,w_2\right)\overline{dy\ \left(w_1',w_2'\right)}\right\rangle=S_u\left(w_1,w_2\right)d\ \left(w_1-w_1'\right)d\ \left(w_2-w_2'\right)dw_1dw_2dw_1'dw_2',$$

где $S_u\left(w_1,w_2\right)$ – спектральная плотность поля, $d\left(x\right)$ – дельта-функция Дирака, а черта означает комплексное сопряжение.

При быстро изменяющемся случайном поле микронеоднородностей $U\left(x_1,x_2\right)$ влияние границ на деформированное напряженное состояние во внутренней области будет достаточно мало, и можно отвлечься от эффекта границ, заменяя граничные условия требованием ограниченности функций на бесконечности. Поэтому вдали от границ тела решение задачи также будет однородным и ищется в виде:

$$s_{mn}^{*}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{iw_k x_k}a_{mn}\left(w_1,w_2\right)dy\ \left(w_1,w_2\right), \tag{14}$$

где $a_{mn}\left(w_1,w_2\right)$ – неизвестные весовые функции, которые можно вычислить из системы линейных уравнений, получающейся подстановкой представлений (13), (14) в полученные соотношения для флуктуаций напряжений.

При помощи формулы (14) и известной формулы для вычисления дисперсий номинальных напряжений $D\left[s_{kl}^{*}\right]=\left\langle\left|s_{kl}^{*}\right|^2\right\rangle$, получаем:

$$D\left[s_{kl}^{*}\right]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}S_u\left(w_1,w_2\right)a_{kl}^{\ 2}\left(w_1,w_2\right)dw_1dw_2\,. \tag{15}$$

В работе вычислены значения дисперсий номинальных напряжений $D\left[s_{kl}^{*}\right]$ для различных h, n и a, выполнен численный анализ дисперсий (и их приведенных величин) в зависимости от параметра h, показателя нелинейности установившейся ползучести n и степени неоднородности механических характеристик a, выполнен анализ коэффициентов вариации $\dfrac{\sqrt{D[s_{11}]}}{s_{11}^{\ 0}}$, $\dfrac{\sqrt{D[s_{22}]}}{s_{22}^{\ 0}}$, а также величин $\dfrac{\sqrt{D[s_{12}]}}{s^{\ 0}}$ в зависимости от параметров h, a и n.

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы:

1) С увеличением показателя установившейся ползучести n дисперсии напряжений уменьшаются при любом значении коэффициента вариации a.

2) Напряжения s_{11}, s_{22} (детерминированные части которых s_{11}^{0} и s_{22}^{0} являются приложенными напряжениями вдоль главных осей) взаимно влияют на дисперсии друг друга. Причем, чем больше напряжение вдоль одной оси, тем сильнее его влияние на увеличение разброса вдоль другой оси.

3) При двухосном растяжении плоскости в двух взаимно ортогональных направлениях s_{11}^{0} и s_{22}^{0} появляются случайные касательные напряжения, величина флуктуаций которых имеет тот же порядок, что и флуктуации нормальных напряжений, чего не наблюдается для детерминированного случая.

Далее выполнено исследование стохастических полей деформаций. Получено, что дисперсии деформаций $D\left[p_{11}^{*}\right]$ выражаются через дисперсии $D\left[s_{11}^{*}\right]$, $D\left[s_{22}^{*}\right]$, $D[U]$, и моменты $\left\langle s_{11}^{*}s_{22}^{*}\right\rangle$, $\left\langle s_{11}^{*}U\right\rangle$, $\left\langle s_{22}^{*}U\right\rangle$.

Показано, что коэффициенты вариаций деформаций $\dfrac{\sqrt{D\left[p_{11}^{*}\right]}}{p_{11}^{*}}$ и $\dfrac{\sqrt{D\left[p_{22}^{*}\right]}}{p_{22}^{*}}$ линейно зависят от величины a, нелинейно – от величин n и h, и не зависят от значения выбранного напряжения s^{0}.

Выполнено детальное исследование статистических оценок для деформаций p_{ij} и их трехсигмовых интервалов в широком спектре изменения параметров неоднородности материала и вида напряженного состояния.

Численные значения отношения дисперсий $\dfrac{D\left[s_{22}\right]}{D\left[s_{11}\right]}$, $\dfrac{D\left[s_{12}\right]}{D\left[s_{11}\right]}$ от различных параметров показали, что зависимость довольно сложна, и отношения дисперсий существенно зависит от величины отношения $h=\dfrac{s_{22}^{0}}{s_{11}^{0}}$, а также от величины показателя нелинейности n.

В **пункте 4.3** приведено решение стохастической задачи для плоскости с учетом поврежденности материала. Для ее решения относительно напряжений s_{ij} и скоростей деформаций $\dot{p}_{ij}$ находится величина $(1+w)$, проводится ее линеаризация, и из (9) и (10) получаем $s_{ij}=\left[1+b\left(1+bH\right)\int\limits_{0}^{t}\overline{s}_{mn}\dot{\overline{p}}_{mn}dt\right]\overline{s}_{ij}$, где введено обозначение $\dot{\overline{p}}_{ij}=c\overline{s}^{\,n-1}\left(\overline{s}_{ij}-\dfrac{1}{3}d_{ij}\overline{s}_{mm}\right)\left[1+aU\right]$, и $\dot{\overline{p}}_{mn}^{0}$, $\dot{\overline{p}}_{mn}^{*}$ – соответственно детерминированные части и флуктуации этих величин. Далее производится представление каждой величины последнего выражения s_{ij}, $\overline{s}_{ij}$ и $\dot{\overline{p}}_{ij}$ в виде детерминированной и случайной частей:

$$s_{ij}^{0}+s_{ij}^{*}=\left[1+b\left(1+bH\right)\int\limits_{0}^{t}\left(\overline{s}_{mn}^{0}+\overline{s}_{mn}^{*}\right)\left(\dot{\overline{p}}_{mn}^{0}+\dot{\overline{p}}_{mn}^{*}\right)dt\right]\left(\overline{s}_{ij}^{0}+\overline{s}_{ij}^{*}\right).$$

Далее были получены выражения для флуктуаций напряжений s_{ij}^{*} в общем случае неоднородного напряженного состояния ($\overline{s}_{11}^{0}=s^{0}$, $\overline{s}_{22}^{0}=hs^{0}$, h – параметр), и подробно проанализирован случай однородного напряженного состояния $(h=1)$, для которого имеем:

$$s_{ii}^{*}=\overline{s}_{ii}^{*}+\frac{cb}{3}(s^{0})^{n+1}\left(2\overline{s}_{ii}^{*}t+(n+1)\int\limits_{0}^{t}(\overline{s}_{11}^{*}+\overline{s}_{22}^{*})dt+2s^{0}aUt\right)+$$

$$+\frac{2cb}{3}bH(s^{0})^{n+2}t \;\; ; \quad s^{*}_{12}=\overline{s}^{*}_{12}+\frac{2cb}{3}(s^{0})^{n+1}\overline{s}^{*}_{12}t\,. \tag{16}$$

Для данного частного случая, подставляя (16) в (12), получим:

$$\frac{n+3}{2}(1+2ft)(\overline{s}^{*}_{11,22}+\overline{s}^{*}_{22,11})+\frac{n-3}{2}(1+2ft)(\overline{s}^{*}_{11,11}+\overline{s}^{*}_{22,22})+$$

$$+n(n+1)f\int\limits_0^t(\overline{s}^{*}_{11,22}+\overline{s}^{*}_{11,11}+\overline{s}^{*}_{22,11}+\overline{s}^{*}_{22,22})dt+(1+2ft)as^{0}\left(U_{,22}+U_{,11}\right)+$$

$$+2nftbs^{0}\left(H_{,11}+H_{,22}\right)-6\overline{s}^{*}_{12,12}(1+2ft)=0\,, \tag{17}$$

где $f=\frac{cb}{3}\left(s^{0}\right)^{n+1}$.

В итоге получилось интегрально-дифференциальное уравнение в частных производных с переменными коэффициентами, которое решить достаточно сложно. Поэтому было сделано предположение, что процессы ползучести и накопления поврежденности оказывают независимое влияние на вероятностные характеристики напряжений. В результате, рассматривая только часть, характеризующую процесс накопления поврежденности материала, и отбрасывая часть, определяющую реологию материала, получили

$$\frac{n+3}{2}(1+2ft)(\overline{s}^{*}_{11,22}+\overline{s}^{*}_{22,11})+\frac{n-3}{2}(1+2ft)(\overline{s}^{*}_{11,11}+\overline{s}^{*}_{22,22})+$$

$$+2nftbs^{0}\left(H_{,11}+H_{,22}\right)-6\overline{s}^{*}_{12,12}(1+2ft)=0\,.$$

Далее применялся аппарат, разработанный в пункте 4.2. В результате получено

$$D_2\left[s^{*}_{11}\right]=D_2\left[s^{*}_{22}\right]=\frac{6b^{2}(s^{0})^{2}f^{2}t^{2}}{(n+3)^{2}(1+2ft)^{2}}\,, \tag{18}$$

откуда следует, что дисперсии явным образом зависят от случайного показателя b и времени t. Также показано, что дисперсии увеличиваются при уменьшении показателя n. Суммарная дисперсия равна:

$$D[s_{11}]=D[s_{22}]=\frac{3a^{2}(s^{0})^{2}}{2(n+3)^{2}}+\frac{6b^{2}(s^{0})^{2}f^{2}t^{2}}{(n+3)^{2}(1+2ft)^{2}}\,. \tag{19}$$

Проведенный численный анализ показал, что эти дисперсии в рамках времени проведения эксперимента соизмеримы с дисперсиями, полученными для напряжений в первой задаче в частном случае – при равномерном растяжении. Следовательно, случайные вариации механических свойств материала способны оказывать существенное влияние на оценку работоспособности элементов конструкций.

Основные результаты выполненных исследований состоят в следующем:

1. Выполнен стохастический анализ экспериментальных данных и обоснован аналитический вид корреляционной функции для неупругой реологической деформации, являющейся основной стохастической информацией при решении стохастических краевых задач ползучести.

2. На основе метода малого параметра построено аналитическое решение одномерной нелинейной стохастической краевой задачи для толстостенной

трубы в случае плоского деформированного состояния в условиях установившейся ползучести. Получен рекуррентный вид системы дифференциальных уравнений метода малого параметра для вычисления полей скоростей деформаций и напряжений в любом приближении.

3. На основе решения одномерной стохастической краевой задачи для толстостенной трубы выполнен анализ и установлено существенное влияние показателя нелинейности установившейся ползучести и степени неоднородности материала на стохастические оценки полей скоростей деформаций, напряжений и перемещений.

4. Разработан аналитический метод решения двухмерных стохастических краевых задач с учетом эффектов ползучести, накопления поврежденности и разрушения на основе метода линеаризации и спектрального разложения случайных функций (на примере двухосного неоднородного нагружения плоскости).

5. Выполнено детальное исследование и анализ влияния параметров реологических стохастических моделей, степени неоднородности материала и вида напряженного состояния на статистические оценки случайных полей напряжений, деформаций и перемещений для двухмерной задачи.

6. Разработаны методики и алгоритмы определения показателей надежности элементов конструкций из структурно-неоднородных реономных материалов на основе аналитических методов решения стохастических краевых задач.

7. Решен ряд новых модельных задач оценки надежности толстостенной трубы из стохастически неоднородного материала в широком спектре изменения параметров реологических моделей, степени неоднородности материала, геометрических размеров и внешних нагрузок.

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах

1. Должковой А.А., Попов Н.Н. Нелинейная задача о деформировании стохастически неоднородной толстостенной трубы // Математические модели и краевые задачи. Труды 11 межвуз. конф., Ч. 1. Самара, 2001. С. 41-45. (авт. 3 стр.)
2. Должковой А.А., Попов Н.Н. Решение нелинейной стохастической задачи ползучести для толстостенной трубы методом малого параметра // Вестник СамГТУ. Сер. физ.-мат. науки, 2002. № 16, С. 84-89. (авт. 3 стр.)
3. Попов Н.Н., Должковой А.А. Нелинейная задача о деформировании стохастически неоднородной плоскости // Математические модели и краевые задачи. Труды 13 межвуз. конф., Ч. 1. Самара, 2003. С. 148-154. (авт. 4 стр.)
4. Должковой А.А., Попов Н.Н. Решение стохастической задачи о деформировании толстостенной трубы в третьем приближении // Вестник УГТУ-УПИ. Механика микронеоднородных материалов и разрушение. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2004. № 22(52). С. 52-57. (авт. 4 стр.)
5. Должковой А.А., Попов Н.Н. Применение метода малого параметра к решению стохастических задач о деформировании толстостенных металлических конструкций // Актуальные проблемы современной науки. Ч. 3, 4: Механика. Машиностроение и металловедение. Металлургия. Литейное производство. Труды 5-й Междун. конф. молодых ученых. Самара: СамГТУ, 2004, С. 17-23. (авт. 4 стр.)
6. Радченко В.П., Должковой А.А., Монеткин А.А. О корреляционной функции для микродеформаций пластичности и ползучести // Математические модели

и краевые задачи. Труды Второй Всерос. научн. конф., Ч. I. Самара, 2005. С. 256-260. (авт. 3 стр.)
7. Должковой А.А., Попов Н.Н., Радченко В.П. Метод оценки надежности толстостенной трубы на основе аналитического решения стохастической задачи установившейся ползучести // Тез. докл. 14-й зимней школы по механике сплошных сред. Пермь: ИМСС УрО РАН, 2005. С. 103.
8. Дедова В.Н., Должковой А.А. О сходимости метода малого параметра в краевой задаче установившейся ползучести для толстостенной трубы из неоднородного материала // Дифференциальные уравнения и их приложения. Тез. докл. Всерос. конф. Самара, 2005. С. 26-27. (авт. 1 стр.)
9. Должковой А.А. Исследование произвольного напряженно-деформированного состояния стохастически неоднородной плоскости в условиях установившейся ползучести // Дифференциальные уравнения и их приложения. Тез. докл. Всерос. конф., Самара, 2005. с. 30-31.
10. Должковой А.А. Исследование стохастических полей напряжений и деформаций на основе решения краевой задачи о растяжении плоскости в условиях ползучести // Актуальные проблемы современной науки. Ч. 3, 4: Механика. Машиностроение и металловедение. Металлургия. Литейное производство. Труды 1-ого Междунар. форума (6-й междунар. конф.) молодых ученых. Самара: СамГТУ, 2005, С. 14-22.
11. Попов Н.Н., Должковой А.А. Нелинейная стационарная задача о ползучести стохастически неоднородной плоскости // Обозрение прикладной и промышленной математики. М: ОПиПМ, 2005, Т.12, Вып.1. С. 175-176. (авт. 1 стр.)
12. Должковой А.А., Попов Н.Н. Решение стохастической задачи о деформировании толстостенной трубы в третьем приближении // Проблемы механики и разрушения материалов. Тез. докл. III Всероссийского Семинара им. С.Д. Волкова, Екатеринбург, 2004. С. 25.

Подписано в печать 26 сентября 2005 г.
Заказ №1531. Тираж 100 экз.
Отпечатано на ризографе.
Самарский государственный технический университет.
Отдел типографии и оперативной полиграфии.
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244