

На правах рукописи

Исуткина Вера Николаевна

**РАЗРАБОТКА АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ
СТОХАСТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ УСТАНОВИВШЕЙСЯ
ПОЛЗУЧЕСТИ ДЛЯ ПЛОСКОГО ДЕФОРМИРОВАННОГО
СОСТОЯНИЯ**

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Самара – 2007

Работа выполнена в Самарском государственном техническом университете

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук, профессор Радченко Владимир Павлович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор,
первый проректор Пермского государственного технического университета
Ташкинов Анатолий Александрович;
кандидат физико-математических наук,
доцент Самарского государственного университета
Степанова Лариса Валентиновна

Ведущая организация

Институт Механики Сплошных Сред УрО РАН (г. Пермь)

Защита состоится «14» ноября 2007 г. в 11 часов на заседании диссертационного совета Д.212.218.06 при Самарском государственном университете по адресу: 443011, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1, зал заседаний

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Самарского государственного университета

Автореферат разослан « » октября 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Глушеников В.С.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Структурная неоднородность материала, которой обладают все реальные среды, существенно влияет на процесс деформирования и разрушения твердых реологических тел. Объективно существующий разброс экспериментальных данных для деформации ползучести не позволяет описать ряд эффектов в рамках классических детерминированных теорий. Это свидетельствует о необходимости применения вероятностно-статистических методов при исследовании процессов неупругого реологического деформирования и разработке методов решения стохастических краевых задач ползучести. Существующие методы решения такого рода задач в основном основаны на численных процедурах и методе статистических испытаний. Аналитические методы решения для стохастических краевых задач разработаны лишь для физически и статистически линейных задач теории упругости. В теории ползучести соответствующие аналитические решения получены на основе метода малого параметра (метода возмущений) лишь для одномерных задач в первом приближении. Вопросы получения решений с более высоким порядком членов разложения как для одномерных, так и двумерных задач, а также проблема сходимости решений, остаются открытыми.

Вышеизложенное определяет актуальность диссертационного исследования и позволяет сформулировать цель настоящей работы.

Целью работы являлась разработка аналитических методов решения одномерных и двумерных стохастических краевых задач установившейся ползучести для толстостенной трубы под действием внутреннего давления на основе метода малого параметра, анализ влияния членов третьего и более высокого порядков на погрешность решения, исследование сходимости метода малого параметра и применение полученных аналитических решений к оценке показателей надежности элементов конструкций.

Научная новизна работы заключается в следующем:

1) разработан аналитический метод решения одномерной статистически нелинейной краевой задачи установившейся ползучести для плоского деформированного состояния в цилиндрической системе координат с учетом членов четвертого и более высокого порядков разложения по малому параметру; получены аналитические статистические оценки для полей скоростей деформаций, перемещений и напряжений до четвертого члена разложения;

2) исследована сходимость аналитических решений в одномерной задаче для стохастических полей напряжений и скоростей деформаций ползучести, выполнен сравнительный анализ этих решений с решениями, полученными по методу статистических испытаний (методу Монте-Карло);

3) получены оценки погрешности, вносимой членами второго и более высокого порядков в аналитические решения одномерной задачи для полей напряжений и скоростей деформаций толстостенной трубы из микронеоднородного реономного материала;

4) разработан аналитический метод решения двумерной статистически нелинейной краевой задачи установившейся ползучести для плоского деформированного состояния в цилиндрической системе координат на основе метода малого параметра в первом приближении;

5) разработаны методы оценки показателей надежности элементов конструкций на основе предложенных аналитических методов решения стохастических краевых задач установившейся ползучести по параметрическим (деформационным) критериям отказа.

Практическая значимость работы заключается в разработке аналитических методов решения одномерных и двумерных стохастических краевых задач установившейся ползучести для толстостенной трубы на основе метода малого параметра и исследовании их на сходимость, что является, с одной стороны, важным вкладом в дальнейшее развитие соответствующего раздела механики деформируемого твердого тела. С другой стороны, разработанные методики определения показателей надежности элементов конструкций из структурно-неоднородных материалов на основе аналитических методов решения стохастических краевых задач позволяют научно-обоснованно подходить к проблеме назначения ресурса элементов конструкций в условиях ползучести материала.

Обоснованность выносимых на защиту научных положений, выводов и рекомендаций, а также достоверность полученных результатов исследований подтверждается:

– адекватностью имеющихся модельных представлений физической картине исследуемых стохастических процессов в условиях ползучести материала;

– корректностью использования математического аппарата, законов механики деформируемого твердого тела, положений теорий обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, теорий случайных функций и надежности;

– численным исследованием сходимости построенных аналитических решений и сопоставлением результатов расчета разработанных решений по методу малого параметра с апробированным решением по методу статистических испытаний.

На защиту выносятся:

1) аналитический метод решения одномерных стохастических краевых задач установившейся ползучести для случая плоского деформированного состояния в цилиндрической системе координат на основе метода малого параметра с учетом членов четвертого и более высокого порядков разложения;

2) исследование сходимости и оценка погрешности аналитических решений в одномерной задаче для стохастических полей напряжений и скоростей деформаций ползучести;

3) аналитический метод решения двумерной стохастической краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы в условиях плоского деформированного состояния на основе метода малого параметра в первом приближении;

4) методики и алгоритмы оценки показателей надежности элементов конструкций на основе предложенных аналитических методов решения стохастических краевых задач установившейся ползучести по параметрическим (деформационным) критериям отказа;

5) качественные и количественные результаты, полученные при построении моментных функций случайного процесса, решении стохастических краевых задач и оценке надежности элементов конструкций в условиях ползучести.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и списка используемых источников из 162 названий. Работа содержит 247 страниц основного текста.

Апробация работы. Результаты научных исследования опубликованы в 12 печатных работах и докладывались на Всероссийской научно-технической конференции «Высокие технологии в машиностроении» (г. Самара, 2004 г.), на всероссийской конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» (г. Самара, 2005 г.), на третьей Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи» (г. Самара, 2006 г.), на Всероссийской конференции «Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций» (г. Новосибирск, 2006 г.), на 2-м Международном форуме молодых ученых (7-й Международной конференции) «Актуальные проблемы современной науки. Естественные науки» (г. Самара, 2006 г.), на Всероссийской конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» (г. Самара, 2007 г.), на четвертой Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (г. Самара, 2007 г.), на Международном конгрессе «Нелинейный динамический анализ – 2007» (г. Санкт-Петербург, 2007 г.), на Международной конференции «XVIII сессия Международной школы по моделям механики сплошной среды» (г. Саратов, 2007 г.), на научном семинаре «Механика и прикладная математика» Самарского государственного технического университета (рук. проф. Радченко В.П., 2005-2007 г.г.); на научном семинаре «Актуальные проблемы механики» Самарского государственного университета (рук. проф. Астафьев В.И., 2007 г.).

Работа выполнялась в рамках тематического плана НИР СамГТУ (тема «Разработка методов математического моделирования динамики и деградации процессов в механике сплошных сред, технических, экономических, биологических и социальных системах, и методов решения неклассических краевых задач и их приложений»).

Благодарности. Автор выражает благодарность научному руководителю профессору, доктору физико-математических наук Радченко В.П. за постановки задач и постоянное внимание к работе и научному консультанту доценту, кандидату физико-математических наук Попову Н.Н. за консультации и поддержку работы.

Краткое содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, определяются цели исследования, излагаются научная новизна и практическая значимость работы, формулируются основные положения, выносимые на защиту, приводится структура диссертационной работы, а также сведения об апробации работы и публикациях.

Глава 1. Аналитический обзор и постановка задачи.

В **главе 1** дан краткий обзор литературы по научным проблемам, близким к теме диссертационной работы. Анализируются существующие подходы к построению стохастических моделей неупругого деформирования структурно-неоднородных сред и рассматриваются постановки стохастических краевых задач в механике деформируемого твердого тела, основы которых заложены В.В. Болотиным, С.Д. Волковым, А.А. Ильюшиным, В.А. Ломакиным, Ю.П. Самариным и другими авторами. Отмечается, что наиболее общим является случай, когда случайные функции задаются многоточечными плотностями распределения вероятностей. Однако их построение во многих случаях (особенно в области ползучести) затруднительно, поскольку требует большого объема экспериментальных данных. Указывается, что большинство стохастических краевых задач и задач надежности могут быть решены при значительно меньшей статистической информации о случайных функциях, а именно, наличии двух моментных функций – математического ожидания и корреляционной функции.

Одним из часто используемых методов решения стохастических краевых задач является метод возмущений (метод малого параметра). Этот метод широко применяется в различных областях математики, механики и физики для решения разнообразных прикладных задач. Число работ в этом направлении необозримо, но в основном они посвящены решению задач о напряженно-деформированном состоянии (НДС) в упругой, упругопластической областях и в области ползучести лишь для детерминированной постановки. Например, он использовался в работах А.А. Алехина, М.Т. Алимжанова, Г.И. Быковцева, А.Н. Гузя, Б.А. Друянова, Л.В. Ершова, Д.Д. Ивлева, А.А. Ильюшина, А.Ю. Ишлинского, Л.А. Максимовой, А.А. Маркина, Л.М. Качанова, Д. Коула, В.Д. Кубенко, В.В. Соколовского, А.Н. Спорыхина, Л.В. Степановой, Л.А. Толоконникова, И.Ю. Цвелодуба, Е.А. Целистовой, А.А. Шваба, М. Kaminski, Yang Haitia, Guo Xinglin и других.

Для случая стохастически неоднородной линейно упругой среды метод возмущений развивался в работах В.В. Болотина и В.А. Ломакина. Однако, поскольку этот подход связан с трудностями математического характера, то при решении конкретных задач в большинстве случаев ограничиваются лишь первым приближением (работы З.В. Амелина, Н.В. Архипова, А.А. Газганова, В.А. Ломакина, Б.П. Макарова, В.Н. Наумов, В.В. Подалкова, В.В. Петрова, В.А. Романова, Г.В. Тихонькова, В.И. Шейнина и других авторов).

Что касается стохастических краевых задач, то здесь применение метода малого параметра (метода возмущений) в теории ползучести сдерживается проблемами не только физической, но и стохастической нелинейности. Число работ в этом направлении ограничено и представлено работами Ю.П. Самарина, В.П. Радченко, Н.Н. Попова и В.А. Кузнецова с соавторами, при этом в подавляющем большинстве работ решение получено в первом приближении.

Детально проанализированы методы решения стохастических задач, базирующиеся на различных спектральных представлениях случайных функций, основы которых заложены В.В. Болотиным и А.А. Свешниковым.

Поскольку одним из элементов постановки стохастических краевых задач ползучести являются стохастические физические уравнения для среды, то большее внимание уделено вопросу построения стохастических моделей. Отмечается, что стохастические реологические модели строятся на основе обобщения соответствующих детерминированных теорий. Здесь отмечаются работы В.И. Астафьева, А.Н. Бадаева, В.В. Болотина, Б.В. Горева, Ю.И. Кадашевича, Л.М. Качанова, Я.М. Клебанова, В.И. Ковпака, В.Л. Колмогорова, Г.Ф. Лепина, А.Ф. Никитенко, В.В. Новожилова, А.М. Локощенко, Н.Н. Малинина, Ю.Н. Работнова, Ю.Н. Радаева, В.П. Радченко, Ю.П. Самарина, О.В. Соснина, С.А. Шестерикова, И.Ю. Цвелодуба, J.A. Betten, J.T. Boyle, F.A. Leckie, J. Spence и многих других авторов.

Выделен класс задач, в которых строятся модели, отражающие закритическое неупругое деформирование и разрушения материала, и разрабатываются методы решения соответствующих краевых задач. Решению этой проблемы посвящены работы В.Э. Вильдемана, В.Л. Каткова, В.Д. Ключникова, А.А. Лебедева, Е.В. Небогиной, В.И. Миронова, В.П. Радченко, Ю.В. Соколкина, В.В. Стружанова, А.А. Ташкинова, Р.Г. Шина и других.

Проанализированы существующие методики и алгоритмы оценки показателей надежности элементов конструкций в условиях ползучести по детерминированным, силовым и катастрофическим критериям отказа.

По результатам литературных данных сформулированы основные задачи диссертационной работы.

Глава 2. Решение стохастической краевой задачи установившейся ползучести толстостенной трубы методом малого параметра с учетом членов четвертого порядка.

В главе 2 решается одномерная физически и статистически нелинейная краевая задача о ползучести толстостенной трубы под действием внутреннего давления q для случая плоского деформированного состояния в цилиндрической системе координат ($\varepsilon_z(r, t) = 0$) методом малого параметра до членов четвертого и более высокого порядков разложения. Предполагается, что структурные неоднородности материала трубы описываются функцией одной

переменной (радиуса r), поэтому компоненты тензоров скоростей деформаций и напряжений будут также случайными функциями одной переменной r .

В пункте 2.1 приведена постановка задачи, которая содержит уравнения равновесия и совместности деформаций:

$$\rho \frac{d\sigma_r}{d\rho} - (\sigma_\varphi - \sigma_r) = 0, \quad (1) \quad \rho \frac{d\dot{\varepsilon}_\varphi}{d\rho} + \dot{\varepsilon}_\varphi - \dot{\varepsilon}_r = 0; \quad (2)$$

граничные условия:

$$\sigma_r(1) = -q, \quad \sigma_r(\beta) = 0, \quad (3)$$

где $\rho = \frac{r}{a}$ – безразмерный радиус, $\beta = \frac{b}{a}$, a и b – внутренний и наружный радиусы трубы ($1 \leq \rho \leq \beta$).

В качестве определяющих соотношений для деформации ползучести ε_r и ε_φ используются следующие реологические соотношения вязкого течения в стохастической форме:

$$\dot{\varepsilon}_r = cS^{n-1} \overline{\sigma_r} [1 + \alpha U(\rho)], \quad \dot{\varepsilon}_\varphi = cS^{n-1} \overline{\sigma_\varphi} [1 + \alpha U(\rho)], \quad (4)$$

где σ_r и σ_φ – радиальное и тангенциальное напряжения, $U(\rho)$ – случайная функция, описывающая стохастическую неоднородность материала цилиндрической оболочки, характеристики которой известны: $\langle U \rangle = 0$, $\langle U^2 \rangle = 1$; α – коэффициент вариации механических свойств ($0 < \alpha < 1$); c , n – постоянные материала; $\langle \cdot \rangle$ – символ математического ожидания; $S = \sqrt{3} \overline{\sigma_\varphi}$ – интенсивность напряжений; $\overline{\sigma_r} = -\frac{1}{2}(\sigma_\varphi - \sigma_r)$, $\overline{\sigma_\varphi} = \frac{1}{2}(\sigma_\varphi - \sigma_r)$.

Кроме этого считается известной корреляционная функция для функции $U(x)$, аналитическое выражение для которой принимается в виде

$$K(\rho) = e^{-\gamma|\rho|} \left(\cos(\beta\rho) + \frac{\gamma}{\beta} \sin(\beta|\rho|) \right),$$

где γ , β – постоянные величины ($\gamma > 0$), $\rho = x_2 - x_1$ – расстояние между пространственными переменными.

В пункте 2.2 приводится решение поставленной стохастической задачи, для получения которого используется метод разложения радиального напряжения σ_r по малому параметру α :

$$\sigma_r = \sigma_{r0} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k \sigma_{rk}, \quad \langle \sigma_r \rangle = \sigma_{r0}, \quad \langle \sigma_{rk} \rangle = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (5)$$

где σ_{r0} – решение аналогичной детерминированной задачи (нулевое приближение), σ_{rk} ($k = 1, 2, \dots$) – k -тое приближение. Совместное использование (1)-(5) позволило получить рекуррентную систему дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{aligned}
\rho\sigma''_{r0} + \frac{n+2}{n}\sigma'_{r0} &= 0; \\
\rho\sigma''_{r1} + \frac{n+2}{n}\sigma'_{r1} &= -\frac{\rho}{n}U'\sigma'_{r0}; \\
\rho\sigma''_{rk} + \frac{n+2}{n}\sigma'_{rk} &= -\frac{\rho}{n}U'\left[\sigma'_{rk-1} - U\sigma'_{rk-2} + U^2\sigma'_{rk-3} - \dots + (-1)^{k-1}U^{k-1}\sigma'_{r0}\right], \\
k &= 2, 3, 4, \dots
\end{aligned} \tag{6}$$

Первое приближение дает известное детерминированное решение задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы:

$$\sigma_{r0} = A \left[1 - \left(\frac{\beta}{\rho} \right)^{\frac{2}{n}} \right], \tag{7}$$

где $A = \frac{q}{\beta^{\frac{2}{n}} - 1}$. Решая далее последовательно уравнения (6), найдена

рекуррентная формула для определения радиального напряжения σ_r в k -том приближении:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rk} &= \frac{2A\beta^{\frac{2}{n}}}{n^2} \left[(-1)^k \frac{(n+1)(2n+1)\dots((k-1)n+1)}{k!n^{k-1}} I_k(\rho) + \right. \\
&+ (-1)^{k-1} \frac{2(n+1)(2n+1)\dots((k-2)n+1)}{n(k-1)!n^{k-1}} H_1 I_{k-1}(\rho) + \\
&+ \sum_{m=2}^{k-1} (-1)^{k-m} \frac{2(n+1)(2n+1)\dots((k-m-1)n+1)}{n(k-m)!n^{k-m}} C_{m-1} I_{k-m}(\rho) + \\
&\left. + C_{k-1} \left(1 - \rho^{\frac{2}{n}} \right) \right], \tag{8}
\end{aligned}$$

где $I_k(\rho) = \int_1^\rho U^k(x) x^{-1-\frac{2}{n}} dx$, $H_k = BI_k(\beta)$, $B = \frac{1}{1 - \beta^{\frac{2}{n}}}$,

$$C_0 = H_1 \text{ при } k=1,$$

$$\begin{aligned}
C_{k-1} &= (-1)^{k-1} \frac{(n+1)(2n+1)\dots((k-1)n+1)}{k!n^{k-1}} H_k + \\
&+ \sum_{l=1}^{k-1} (-1)^{k-l-1} \frac{2(n+1)(2n+1)\dots((k-m-1)n+1)}{n(k-l)!n^{k-l}} H_{k-l} C_{l-1}, \quad k=2, 3, 4, \dots
\end{aligned}$$

Из (1) с учетом (8) находится любое приближение для напряжения σ_φ . Далее, зная σ_r и σ_φ в любом приближении, из (4) определяются $\dot{\varepsilon}_\varphi$ и $\dot{\varepsilon}_r$ и величина перемещения $u(t)$. В работе найдены аналитические выражения для всех параметров напряженно-деформированного состояния до шестого порядка

включительно, т.е. в решениях вида (5) учитывались члены $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^6$ и пренебрегались члены, содержащие α^k ($k \geq 7$).

В пункте 2.3 приведены вспомогательные вычисления моментов высших порядков для решения стохастической краевой задачи, необходимые для получения дисперсий полей напряжений, скоростей деформаций и перемещений. Поскольку для вычисления дисперсий напряжений и скоростей деформаций с учетом пятого и шестого приближений необходимо иметь моменты десятого и двенадцатого порядков (а это технически крайне сложная и трудоемкая задача), то в настоящей работе основные статистические характеристики скоростей деформаций и напряжений найдены с учетом четвертого приближения. Поэтому в данном пункте приведены формулы для центральных моментов случайной функции четвертого, шестого и восьмого порядков.

В пункте 2.4 построены основные статистические характеристики (математическое ожидание и дисперсия) случайных полей напряжений, скоростей деформаций и перемещений до четвертого приближения включительно. Так, математическое ожидание скорости деформаций $\dot{\varepsilon}_\varphi$ в четвертом приближении задается выражением:

$$M[\dot{\varepsilon}_\varphi] = T \left(\frac{\beta}{\rho} \right)^2 \left[1 + \alpha^2 \left(\frac{2(n+1)}{n^3} \langle H_1^2 \rangle - \frac{n+1}{n^2} \langle H_2 \rangle \right) + \right. \\ \left. + \alpha^4 \left(-\frac{(n+1)(2n+1)(3n+1)}{12n^4} \langle H_4 \rangle + \frac{2(n+1)^2(2n+1)}{3n^5} \langle H_1 H_3 \rangle - \frac{2(n+1)^2(n+2)}{n^6} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \langle H_1^2 H_2 \rangle + \frac{(n+1)^3}{2n^5} \langle H_2^2 \rangle + \frac{2(n+1)(n+2)(n+3)}{3n^7} \langle H_1^4 \rangle \right) + o(\alpha^4) \right];$$

дисперсия в этом же приближении выражается следующим образом:

$$D[\dot{\varepsilon}_\varphi] = T^2 \left(\frac{\beta}{\rho} \right)^4 \left[\alpha^2 \frac{4}{n^2} D[H_1] + \alpha^4 \frac{4(n+1)^2}{n^6} D[H_1^2] + \alpha^4 \frac{(n+1)^2}{n^4} D[H_2] + \right. \\ \left. + \alpha^6 \frac{(n+1)^2(2n+1)^2}{9n^6} D[H_3] + \alpha^6 \frac{4(n+1)^4}{n^8} D[H_1 H_2] + \right. \\ \left. + \alpha^6 \frac{16(n+1)^2(n+2)^2}{9n^{10}} D[H_1^3] + \alpha^8 \frac{(n+1)^2(2n+1)^2(3n+1)^2}{144n^8} D[H_4] + \right. \\ \left. + \alpha^8 \frac{4(n+1)^4(2n+1)^2}{9n^{10}} D[H_1 H_3] + \alpha^8 \frac{4(n+1)^4(n+2)^2}{n^{12}} D[H_1^2 H_2] + \right. \\ \left. + \alpha^8 \frac{(n+1)^6}{4n^{10}} D[H_2^2] + \alpha^8 \frac{4(n+1)^2(n+2)^2(n+3)^2}{9n^{14}} D[H_1^4] + \right. \\ \left. + \alpha^4 \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^4} \left\langle H_1^0 H_3^0 \right\rangle - \alpha^4 \frac{8(n+1)^2}{n^5} \left\langle H_1^0 (H_1^0 H_2^0) \right\rangle + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +\alpha^4 \frac{16(n+1)(n+2)}{3n^6} \left\langle H_1^0 H_1^0 \right\rangle - \alpha^4 \frac{4(n+1)^2}{n^5} \left\langle H_1^0 H_2^0 \right\rangle - \\
& -\alpha^6 \frac{(n+1)^2 (2n+1)(3n+1)}{3n^7} \left\langle H_1^0 H_4^0 \right\rangle + \alpha^6 \frac{8(n+1)^3 (2n+1)}{3n^8} \left\langle H_1^0 (H_1^0 H_3^0) \right\rangle - \\
& -\alpha^6 \frac{8(n+1)^3 (n+2)}{n^9} \left\langle H_1^0 (H_1^0 H_2^0) \right\rangle + \alpha^6 \frac{2(n+1)^4}{n^8} \left\langle H_1^0 H_2^0 \right\rangle + \\
& +\alpha^6 \frac{8(n+1)^2 (n+2)(n+3)}{3n^{10}} \left\langle H_1^0 H_1^0 \right\rangle + \alpha^6 \frac{(n+1)^2 (2n+1)(3n+1)}{6n^6} \left\langle H_2^0 H_4^0 \right\rangle - \\
& -\alpha^6 \frac{4(n+1)^3 (2n+1)}{3n^7} \left\langle H_2^0 (H_1^0 H_3^0) \right\rangle + \alpha^6 \frac{4(n+1)^3 (n+2)}{n^8} \left\langle H_2^0 (H_1^0 H_2^0) \right\rangle - \\
& -\alpha^6 \frac{(n+1)^4}{n^7} \left\langle H_2^0 H_2^0 \right\rangle - \alpha^6 \frac{4(n+1)^2 (n+2)(n+3)}{3n^9} \left\langle H_2^0 H_1^0 \right\rangle - \\
& -\alpha^6 \frac{4(n+1)^3 (2n+1)}{3n^7} \left\langle H_3^0 (H_1^0 H_2^0) \right\rangle + \alpha^6 \frac{8(n+1)^2 (2n+1)(n+2)}{9n^8} \left\langle H_3^0 H_1^0 \right\rangle - \\
& -\alpha^6 \frac{16(n+1)^3 (n+2)}{3n^9} \left\langle (H_1^0 H_2^0) H_1^0 \right\rangle - \alpha^8 \frac{(n+1)^3 (2n+1)^2 (3n+1)}{9n^9} \left\langle H_4^0 (H_1^0 H_3^0) \right\rangle + \\
& +\alpha^8 \frac{(n+1)^3 (2n+1)(3n+1)(n+2)}{3n^{10}} \left\langle H_4^0 (H_1^0 H_2^0) \right\rangle - \alpha^8 \frac{(n+1)^4 (2n+1)(3n+1)}{12n^9} \times \\
& \times \left\langle H_4^0 H_2^0 \right\rangle - \alpha^8 \frac{(n+1)^2 (2n+1)(3n+1)(n+2)(n+3)}{9n^{11}} \left\langle H_4^0 H_1^0 \right\rangle - \\
& -\alpha^8 \frac{8(n+1)^4 (2n+1)(n+2)}{3n^{11}} \left\langle (H_1^0 H_3^0) (H_1^0 H_2^0) \right\rangle + \alpha^8 \frac{2(n+1)^5 (2n+1)}{3n^{10}} \times \\
& \times \left\langle (H_1^0 H_3^0) H_2^0 \right\rangle + \alpha^8 \frac{8(n+1)^3 (2n+1)(n+2)(n+3)}{9n^{12}} \left\langle (H_1^0 H_3^0) H_1^0 \right\rangle - \\
& -\alpha^8 \frac{2(n+1)^5 (n+2)}{n^{11}} \left\langle (H_1^0 H_2^0) H_2^0 \right\rangle - \alpha^8 \frac{8(n+1)^3 (n+2)^2 (n+3)}{3n^{13}} \left\langle (H_1^0 H_2^0) H_1^0 \right\rangle + \\
& +\alpha^8 \frac{2(n+1)^4 (n+2)(n+3)}{3n^{12}} \left\langle H_2^0 H_1^0 \right\rangle + o(\alpha^8) \Big],
\end{aligned}$$

где $T = \frac{(\sqrt{3})^{n-1} cA^n}{n^n}$, $M[\cdot]$ и $\langle \cdot \rangle$ – символы математического ожидания, $D[\cdot]$ –

символ для обозначения дисперсии, $\binom{0}{\cdot}$ – символ для обозначения центрированной случайной величины. При этом в силу нормального закона

распределения для функции U все моменты нечетных порядков равны нулю. Аналогично получены математические ожидания и дисперсии для σ_r , σ_φ , $\dot{\varepsilon}_r$. В итоге все статистические оценки (через соответствующие моменты) выражаются через функции, зависящие от корреляционной функции $K(\rho)$.

В пункте 2.5 проведен численный анализ стохастических полей скоростей деформаций в толстостенной трубе в зависимости от показателя нелинейности установившейся ползучести n , степени неоднородности материала α , безразмерного радиуса трубы ρ и параметров γ и β в корреляционной функции. Основным вопросом являлось исследование влияния четвертого приближения на решение для дисперсий скоростей деформаций. Установлены острые нелинейные зависимости дисперсий скоростей деформаций от параметров n , α и ρ . На рис. 1-3 приведены типичные графики дисперсий приведенных скоростей деформаций в зависимости от этих параметров.

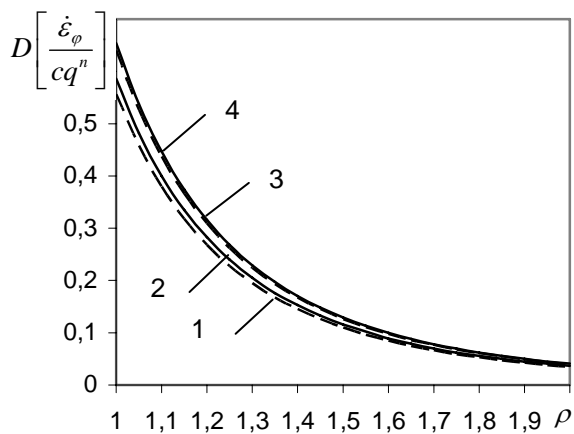


Рис. 1. Графики дисперсий приведенных скоростей деформаций в зависимости от радиуса ρ при $\gamma=10$, $\beta=20$, $\alpha=0,3$ и $n=9$. Цифры – номера приближений.

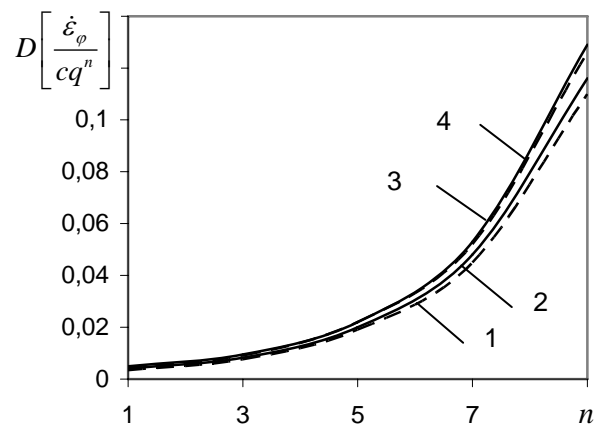


Рис. 2. Графики дисперсий приведенных скоростей деформаций в зависимости от параметра n при $\gamma=10$, $\beta=20$, $\alpha=0,3$ и $\rho=1,5$. Цифры – номера приближений.

Показано, что для слабонеоднородных материалов ($\alpha = 0,1 \div 0,3$) вклад, вносимый в решение третьим и четвертым приближениями, незначителен и здесь при решении краевых задач достаточно ограничиться третьим приближением. Для материалов с большой степенью неоднородности ($\alpha = 0,4 \div 0,5$) значения дисперсий скоростей деформаций, вычисленные с учетом третьего и четвертого приближений, могут превосходить соответствующие значения, вычисленные по двум приближениям, в 1,5 раза (и более). Поэтому в этом случае неучет членов четвертого порядка малости может привести, например, к необоснованному завышению показателей надежности по деформационным критериям отказа.

В пункте 2.6 выполнен численный анализ стохастических полей напряжений в толстостенной трубе. Качественно для дисперсии напряжений и коэффициента вариации получены выводы, как и для полей скоростей

деформации: при значительных α необходимо учитывать старшие приближения.

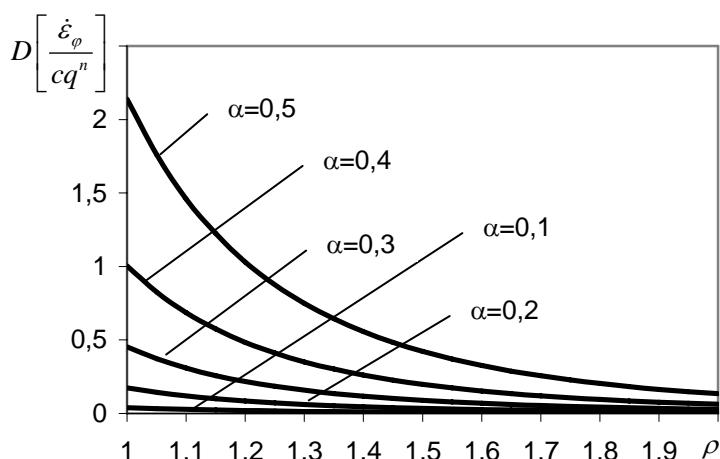


Рис. 3. Графики дисперсий приведенных скоростей деформаций для четвертого приближения в зависимости от радиуса ρ при $\gamma = 5$, $\beta = 20$, $n = 9$ и различных значениях параметра $\alpha = 0, 1, \dots, 0, 5$.

В пункте 2.7 выполнен численный анализ сходимости метода малого параметра с учетом шестого приближения для полей напряжений. Поскольку в явном виде получить для дисперсий напряжений и скоростей деформаций приближения, большие четвертого, крайне трудоемкая задача, то был выполнен анализ сходимости метода малого параметра для полей напряжений на основе комбинированного подхода с использованием метода статистических испытаний и точного решения

детерминированной задачи для трубы из неоднородного по радиусу материала. В случае, если функция $U(\rho)$ в (4) является детерминированной, то краевая задача (1)-(5) имеет точное решение:

$$\sigma_r(\rho) = q \left(\frac{I(\rho)}{I(\beta)} - 1 \right), \quad \sigma_\varphi(\rho) = q \left(\frac{I(\rho)}{I(\beta)} + \frac{c(\rho)^{\frac{1}{n}} \rho^{-\frac{2}{n}}}{I(\beta)} - 1 \right), \quad (9)$$

где $c(\rho) = c_0(1 + \alpha U(\rho))$, $I(\beta) = \int_1^\beta c(\rho)^{\frac{1}{n}} \rho^{-1-\frac{2}{n}} d\rho$.

Далее выполнялась генерация выборки случайных функций $U(\rho)$ в соответствии с видом корреляционной функции $K(\rho)$ и для каждой реализации находились детерминированные решения и по методу малого параметра, и по формулам (9). Показано, что величина максимальной погрешности (в норме Чебышева) между этими решениями для четвертого приближения составляет 0,27%, для пятого – 0,21%, а для шестого – 0,055%. Для среднеквадратической оценки погрешности получены следующие значения: для четвертого приближения – 0,048%; для пятого – 0,02%; для шестого – 0,0092%. Эти результаты косвенно свидетельствуют о хорошей скорости сходимости метода малого параметра в задачах установившейся ползучести.

В пункте 2.8 выполнен сравнительный анализ решений стохастической краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы на основе методов малого параметра (четвертое приближение) и статистических

испытаний. На рис. 4 и 5 приведены типичные результаты расчетов по обоим методам для дисперсий приведенных скоростей деформаций. В целом показано, что максимальная погрешность (в норме Чебышева) отклонения данных расчета по обоим методам не превосходит 9%.

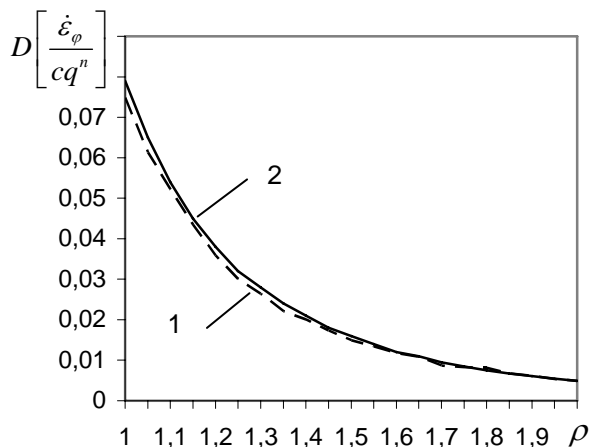


Рис. 4. Графики дисперсий приведенных скоростей деформации в зависимости от ρ при $\alpha = 0,3$, рассчитанных по методу Монте-Карло (1) и по методу малого параметра (2) при $n = 5$, $\gamma = 5$, $\beta = 20$.

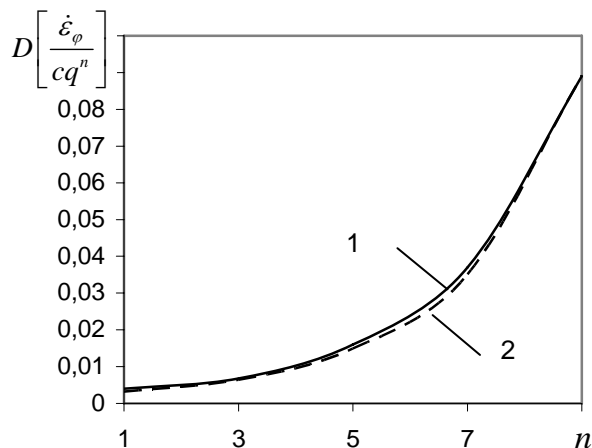


Рис. 5. Графики дисперсий приведенных скоростей деформаций в зависимости от параметра n при $\gamma = 5$, $\beta = 20$, $\alpha = 0,3$ и $\rho = 1,5$: 1 – по методу малого параметра (с учетом четвертого приближения), 2 – по методу Монте-Карло.

Глава 3. Решение двумерной стохастической краевой задачи установившейся ползучести толстостенной трубы под действием внутреннего давления.

Пункт 3.1 посвящен постановке двумерной стохастической задачи.

В пункте 3.2 приведено решение поставленной стохастической задачи методом малого параметра в первом приближении. Случайная однородная функция $U(r, \varphi)$, с помощью которой задается случайное поле возмущений реологических свойств материала в формулах (4), представляется в виде

$$U(r, \varphi) = \lambda_0 J_0(r) + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi) J_k(r),$$

где $J_k(r)$ – функция Бесселя I рода целого порядка; λ_k , β_k – независимые случайные величины, причем $\langle \lambda_k \rangle = \langle \beta_k \rangle = 0$, $\langle \lambda_k^2 \rangle = \langle \beta_k^2 \rangle = 1$. Решение строилось с использованием функции напряжений $F = F(r, \varphi)$, относительно которой получено дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка. В аналитической форме найдены основные статистические характеристики (математическое ожидание и дисперсия) случайных полей скоростей деформаций $\dot{\epsilon}_\varphi$, $\dot{\epsilon}_r$, $\dot{\epsilon}_{r\varphi}$ и напряжений σ_r , σ_φ и $\sigma_{r\varphi}$.

В пункте 3.3 выполнен детальный численный анализ влияния параметра нелинейности установившейся ползучести n , степени неоднородности материала α и величины радиуса на дисперсию и коэффициент вариации

скоростей деформаций и напряжений. Показано, что дисперсии касательных напряжений на два порядка ниже дисперсий нормальных напряжений, а сами зависимости дисперсий от радиуса имеют один (для нормальных напряжений) и три (для касательных напряжений) локальных экстремума. Зависимости дисперсий для напряжений и скоростей деформаций в зависимости от n имеют нелинейный характер: убывающий – для напряжений; возрастающий – для скоростей деформаций. Показано, что коэффициент вариации тангенциальных напряжений на внутренней поверхности трубы изменяется от 2% (при $\alpha = 0,1$) до 10% (при $\alpha = 0,5$) и от 1,75% (при $\alpha = 0,1$) до 8,75% (при $\alpha = 0,5$) – на внешней поверхности трубы для значений $n \geq 2$. Коэффициент же вариации скоростей тангенциальных деформаций изменяется на внутренней поверхности от 8,55% (при $\alpha = 0,1$) до 43,4% (при $\alpha = 0,5$), а на внешней поверхности – от 11,2% (при $\alpha = 0,1$) до 56,7% (при $\alpha = 0,5$).

Глава 4. Приложения аналитических решений стохастической краевой задачи установившейся ползучести для оценки надежности трубы по деформационным критериям отказа.

В пункте 4.1 сформулирована постановка задачи.

В пункте 4.2 приводится методика расчета на надежность толстостенной трубы в условиях ползучести по параметрическим (деформационным) критериям отказа, базирующаяся на приближенном аналитическом решении стохастической задачи для перемещений с учетом членов до четвертого порядка разложения по малому параметру. Параметрический критерий отказа для рассматриваемой толстостенной трубы записывается для перемещения $u(t)$ при заданном его предельном значении u_* . Условие работоспособности считается выполненным, если во всех точках элемента конструкции выполняется соотношение $u(t) < u_*$. Если хотя бы в одной точке выполняется условие $u(t) \geq u_*$, то происходит локальный отказ, что приводит к нарушению работоспособности всего элемента конструкции. Рассматривается задача об оценке надежности толстостенной трубы, когда срок службы определяется моментом времени, в который перемещение $u(t)$ достигает заданного значения u_* . Поскольку перемещение любого фиксированного радиуса цилиндрической оболочки трубы в условиях установившейся ползучести является неубывающей функцией, то для вероятности безотказной работы $P(t)$ на отрезке времени $[0, t]$ имеет место формула:

$$P(t) = P\{u(t) \in (0, u_*)\}.$$

Для вычисления вероятности нахождения случайной функции $u(t)$ в заданной области в рассматриваемый момент времени, используются соотношения для статистических характеристик (математического ожидания и дисперсии) функции перемещения $u(t)$.

Рассмотрен ряд модельных примеров для исследования влияния членов высокого порядка на показатели надежности. Показано, что для слабонеоднородных материалов ($0,1 \leq \alpha \leq 0,3$) учет третьего и четвертого приближений практически не вносит уточнений как при вычислении доверительных интервалов времени отказа, так и оценке работоспособности через функцию надежности. Для сильнонеоднородных материалов третье и четвертое приближения оказывают более существенное влияние на эти же параметры. Исходя из того, что на практике величина α для конструкционных материалов не более 0,3, можно сделать вывод, что четвертое приближение не вносит существенных уточнений для времени отказа, и при решении практических задач достаточно ограничиться третьим приближением, а при значениях α близких 0,1 – вторым приближением.

Основные результаты выполненных исследований состоят в следующем.

1. На основе метода малого параметра построено аналитическое решение одномерной стохастически нелинейной краевой задачи установившейся ползучести толстостенной трубы для случая плоского деформированного состояния. Получен рекуррентный вид системы дифференциальных уравнений метода малого параметра и в аналитической форме получены основные статистические характеристики случайных полей скоростей деформаций и перемещений вплоть до членов четвертого порядка, а для случайных полей напряжений – до третьего порядка разложения.

2. На основе решения одномерной стохастической краевой задачи для толстостенной трубы выполнен анализ и установлено существенное влияние показателя нелинейности установившейся ползучести n и степени неоднородности материала α на стохастические оценки полей скоростей деформаций, напряжений и перемещений. Показано, что для слабонеоднородных материалов ($\alpha = 0,1 \div 0,3$) четвертое приближение вносит незначительный вклад и им можно пренебречь, а для материалов с существенной неоднородностью ($\alpha = 0,4 \div 0,5$) четвертое приближение в решении необходимо учитывать.

3. Выполнен анализ сходимости метода малого параметра с учетом членов до шестого приближения для полей напряжений на основе комбинированного подхода с использованием метода статистических испытаний и точного решения детерминированной краевой задачи для толстостенной трубы из неоднородного материала. Показано, что величина погрешности (в норме Чебышева) между решением по методу малого параметра и точным решением детерминированной задачи, например, для четвертого приближения составляет 0,27%, а для шестого – 0,055%.

4. Выполнен сравнительный анализ решений одномерной стохастической краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы на основе методов малого параметра (четвертое приближение) и статистических испытаний (Монте-Карло). Показано, что максимальная погрешность (в норме Чебышева) отклонения данных расчета по обоим методам не превосходит 9%.

5. В первом приближении решена двумерная стохастически нелинейная краевая задача установившейся ползучести толстостенной трубы методом малого параметра. В аналитической форме найдены основные статистические характеристики случайных полей скоростей деформаций и напряжений и выявлено влияние на них показателя установившейся ползучести n и степени неоднородности материала α . Показано, что дисперсии касательных напряжений на два порядка ниже дисперсий нормальных напряжений, при этом коэффициент вариации для напряжения σ_φ в зависимости от n и α изменяется от 2% до 10%, а для $\dot{\varepsilon}_\varphi$ – от 8,5% до 56,7%.

6. Разработаны методики и алгоритмы расчета на надежность толстостенной трубы в условиях установившейся ползучести по параметрическим (деформационным) критериям отказа на основе построенных аналитических решений стохастических краевых задач и решен ряд новых модельных задач оценки надежности в широком спектре изменения параметров реологических моделей, степени неоднородности материала, геометрических размеров и внешних нагрузок.

Основные результаты диссертации, опубликованные в рецензируемых сборниках:

1. Исуткина В.Н., Маргаритов А.Ю. Сравнительный анализ решений стохастической краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы на основе методов малого параметра и Монте-Карло // Вестник Самарск. госуд. техн. ун-та. Серия: Физ.-матем. науки, 2006. № 43. С. 116-123 (авт. 4 с.).

В других сборниках:

2. Радченко В.П., Кубышкина С.Н., Дедова В.Н. Реологическое деформирование и длительная прочность толстостенной сферической оболочки при действии внутреннего и внешнего давлений // Высокие технологии в машиностроении. Труды Всероссийской научно-технической конференции. Самара: СамГТУ, 2004. С. 44-45 (авт. 0,7 с.).

3. Дедова В.Н., Должковой А.А. О сходимости метода малого параметра в краевой задаче установившейся ползучести для толстостенной трубы из неоднородного материала // Дифференциальные уравнения и их приложения. Тезисы докладов Всероссийской конференции. Самара: Универс-групп, 2005. С. 26-27 (авт. 1 с.).

4. Дедова В.Н. Влияние корреляционных моментов восьмого порядка на стохастическое поле скоростей деформаций для толстостенной трубы в условиях ползучести // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды Третьей Всероссийской научной конференции. Часть 1. Самара: СамГТУ, 2006. С. 57-63.

5. Исуткина В.Н. Численно-аналитический анализ сходимости метода малого параметра в стохастической краевой задаче установившейся ползучести для толстостенной трубы // Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций. Тезисы докладов Всероссийской конференции. Новосибирск, 2006. С. 55.

6. Исуткина В.Н. Моменты высших порядков для решения стохастических краевых задач ползучести // Актуальные проблемы современной науки. Естественные науки. Труды 2-го Междунар. форума молод. уч. (7-й Междунар. конф.) Самара, 2006. С. 161-169.

7. Радченко В.П., Исуткина В.Н., Маргаритов А.Ю. Решение стохастических краевых задач для толстостенной трубы из микронеоднородного материала в условиях ползучести методом Монте-Карло // Дифференциальные уравнения и их приложения. Тезисы докладов научной конференции. Самара: Универс-групп, 2007. С. 96-97 (авт. 0,7 с.).

8. Исуткина В.Н. Численное исследование сходимости метода малого параметра в стохастической задаче для толстостенной трубы с учетом членов до шестого приближения // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды четвертой Всероссийской научной конференции с международным участием. Часть 1. Самара: СамГТУ, 2007. С. 108-114.

9. Попов Н.Н., Исуткина В.Н. Двумерная стохастическая задача ползучести толстостенной трубы под действием внутреннего давления // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды четвертой Всероссийской научной конференции с международным участием. Часть 1. Самара: СамГТУ, 2007. С. 193-197 (авт. 2,5 с.).

10. Попов Н.Н., Исуткина В.Н. Решение двумерной стохастической задачи ползучести в полярных координатах // Нелинейный динамический анализ – 2007. Тезисы докладов международного конгресса. СПб.: Санкт-Петербург. госуд. ун-т, 2007. С. 165 (авт. 0,5 с.).

11. Попов Н.Н., Исуткина В.Н. Статистические характеристики полей напряжений при ползучести стохастически неоднородной толстостенной трубы // XVIII сессия Международной школы по моделям механики сплошной среды. Тезисы докладов Международной конференции. Саратов: Изд-во Саратовск. ун-та, 2007. С. 89-90 (авт. 1 с.).

12. Попов Н.Н., Исуткина В.Н. Построение аналитического решения двумерной стохастической задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы // Вестник Самарск. госуд. техн. ун-та. Серия: Физ.-матем. науки, 2007. № 2 (15). С. 57-61 (авт. 2,5 с.).

Подписано в печать 8 октября 2007 г.

Заказ № 701. Тираж 100 экз.

Отпечатано на ризографе.

Самарский государственный технический университет.

Отдел типографии и оперативной полиграфии.

443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244