На правах рукописи

Коваленко Людмила Викторовна

Исследование краевых эффектов стохастически неоднородных элементов конструкций при установившейся ползучести

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Пермь – 2009

Работа выполнена на кафедре «Прикладная математика и информатика» Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Самарский государственный технический университет».

Научный руководитель:	кандидат физико–математических наук, доцент Попов Николай Николаевич
Официальные оппоненты:	доктор физико–математических наук, профессор Ташкинов Анатолий Алексеевич
	доктор физико–математических наук, профессор Сараев Леонид Александрович
Ведущая организация:	Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск

Защита состоится «______»__________________ 2009 г. в ______ часов на заседании диссертационного совета Д 004.012.01 при Институте механики сплошных сред, расположенном по адресу: 614013, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1, www.icmm.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института механики сплошных сред Уро РАН.

Автореферат разослан «______»__________________ 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор технических наук Березин И. К.

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Различные твердые материалы и тела, встречающиеся в природе и используемые в технике обладают определенной структурной неоднородностью. Структурная неоднородность материала обуславливает появление ряда механических эффектов, которые не могут быть изучены в рамках классических феноменологических теорий. Один из них — эффект пограничного слоя: вблизи границы тела со структурной неоднородностью имеется пограничный слой, в котором напряженно–деформированное состояние отлично от напряженно–деформированного состояния внутренних областей. На границе тела возникает концентрация напряжений, которая может достигать заметной величины. Теоретическое объяснение этого эффекта на основе теории случайных функций достаточно полно проведено для линейно–упругих сред. В условиях ползучести разработка аналитических методов решения стохастических краевых задач сталкивается с серьезными трудностями, основные из них связаны с физической и статистической нелинейностями. Поэтому вопрос об исследовании краевых эффектов в условиях ползучести на сегодняшний день остается открытым.

Все вышеизложенное определяет актуальность диссертационного исследования и позволяет сформулировать цель настоящей работы.

Целью диссертационной работы являлась разработка аналитических методов решения стохастических нелинейных краевых задач установившейся ползучести на основе метода малого параметра и его применения к исследованию краевых эффектов, возникающих вблизи границ структурно–неоднородных тел и к оценке показателей надежности элементов конструкций из структурно–неоднородных материалов.

Научная новизна работы заключается в следующем:

1. разработан приближенный метод решения одномерной нелинейной краевой задачи установившейся ползучести стохастически неоднородной пластины, ослабленной круговым отверстием;

2. в первом приближении методом малого параметра решена двумерная стохастически нелинейная краевая задача установившейся ползучести для плоского напряженного состояния. В аналитической форме получены основные статистические характеристики случайных полей скоростей деформаций и напряжений при неравномерном растяжении полуплоскости и бесконечной полосы;

3. разработан аналитический метод решения пространственной стохастически нелинейной краевой задачи установившейся ползучести на примере растяжения стохастически неоднородного полупространства;

4. на основе решения стохастических краевых задач ползучести проведено исследование влияния параметров реологических моделей сред, степени неоднородности материала на статистические оценки случайных полей напряжений и деформаций вблизи поверхности, на которой заданы детерминированные граничные условия;

5. разработаны вероятностные методы определения показателей надежности элементов конструкций из структурно–неоднородных реономных материалов по деформационному критерию отказа и по критерию длительной прочности.

Практическая значимость работы заключается в разработке аналитических методов решения краевых задач для структурно–неоднородного материала на основе методов линеаризации стохастической нелинейности и применения их результатов к исследованию особенностей деформирования. С другой стороны, разработанные методики определения показателей надежности элементов конструкций из структурно–неоднородных материалов на основе аналитических методов решения стохастических краевых задач позволяют научно–обоснованно подходить к проблеме назначения ресурса элементов конструкций, работающих в условиях ползучести материала.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

1. приближенный метод решения одномерной стохастической краевой задачи установившейся ползучести с концентратором для случая плоского напряженного состояния на основе метода малого параметра;

2. аналитический метод решения двумерных стохастически нелинейных краевых задач установившейся ползучести для плоского напряженного состояния с быстро осциллирующими свойствами материала;

3. аналитический метод решения трехмерной стохастически нелинейной краевой задачи установившейся ползучести вблизи свободной поверхности;

4. исследование в условиях нелинейной ползучести влияния стохастических неоднородностей на напряженно–деформированное состояние вблизи поверхности тела, на которой заданы детерминированные граничные условия;

5. методики и алгоритмы оценки показателей надежности элементов конструкций на основе предложенных аналитических методов решения стохастических краевых задач установившейся ползучести по деформационному критерию отказа и по критерию длительной прочности.

Апробация работы. Результаты научных исследования опубликованы в 16 печатных работах и докладывались на ряде конференций различного уровня: на Третьей Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи» (г. Самара, 2006 г.), на 2–м Международном форуме молодых ученых (7–й Международной конференции) «Актуальные проблемы современной науки. Естественные науки» (г. Самара, 2006 г.), на Всероссийской конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» (г. Самара, 2007 г.), на XXXIII международной молодежной конференции «Гагаринские чтения» (г. Москва, 2007 г.), на 16 Всероссийской конференции молодых ученых «Математическое моделирование в естественных науках» (г. Пермь, 2007 г.), на V Всероссийской конференции «Механика микронеоднородных материалов и разрушение» (г. Екатеринбург, 2008 г.), на XXXIV международной молодежной конференции «Гагаринские чтения» (г. Москва, 2008 г.), на Пятой Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи» (г. Самара, 2008 г.), на 4–м Международном форуме молодых ученых (9–й Международной конференции) «Актуальные проблемы современной науки. Естественные науки» (г. Самара, 2008 г.), на Международной конференции по математической физике и ее приложениям (г. Самара, 2008 г.), на VII Международной конференции по математическому моделированию «Математическое моделирование физических, технических, экономических, социальных систем и процессов» (г. Ульяновск, 2009 г.), на Шестой Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (г. Самара, 2009 г.), на научном семинаре «Механика и прикладная математика» Самарского государственного технического университета (рук. проф. Радченко В. П., 2007 г., 2009 г.).

Работа выполнялась при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 07–01–00478–а) и Федерального агенства по образованию (проект РНП. 2.1.1/3397)

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 18 печатных работах, из них 6 статей в рецензируемых журналах [1–6], 7 статей в сборниках трудов конференций и 6 тезисов докладов. Часть результатов получена в совместных работах с доцентом Н. Н. Поповым (Россия, Самарский государственный технический университет) и в равной мере принадлежат автору диссертации и соавтору.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, 5 глав, заключения и списка используемой литературы. Объем диссертации составляет 162 страницы, в том числе 10 таблиц, 46 рисунков. Список литературы содержит 164 наименования.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, сформулированы основные положения, выносимые автором на защиту.

В первой главе приводится краткий аналитический обзор возможных подходов к исследованию процессов деформирования тел со структурной неоднородностью, анализируются существующие подходы к построению стохастических моделей неупругого деформирования структурно-неоднородных сред и рассматриваются постановки стохастических краевых задач в механике деформируемого твердого тела, основы которых заложены В. В. Болотиным, А. А. Ильюшиным, В. А. Ломакиным, Ю. П. Самариным, Ю. В. Соколкиным и другими авторами.

Рассматриваются различные методы решения стохастических краевых задач. Одним из часто используемых методов решения стохастических краевых задач является метод возмущений (метод малого параметра). Этот метод широко применяется в различных областях математики, механики и физики для решения разнообразных прикладных задач. Для случая стохастически неоднородной линейно-упругой среды метод возмущений развивался в работах В. В. Болотина и В. А. Ломакина. В теории ползучести применение метода возмущения сталкивается с проблемой физической и статистической нелинейности задач. В данном направлении количество работ ограничено и представлено работами Ю. П. Самарина, В. П. Радченко, Н. Н. Попова и В. А. Кузнецова с соавторами.

Проанализированы методы решения различных стохастических задач, базирующиеся на спектральных представлениях случайных функций. Основы этих методов были заложены В. В. Болотиным и А. А. Свешниковым.

Большое внимание уделено вопросу построения стохастических моделей. Отмечается, что стохастические реологические модели строятся путем обобщения соответствующих детерминированных теорий. Здесь отмечаются работы В. И. Астафьева, А. Н. Бадаева, В. В. Болотина, Б. В. Горева, Л. М. Качанова, Я. М. Клебанова, В. И. Ковпака, А. Ф. Никитенко, В. В. Новожилова, А. М. Локощенко, Н. Н. Малинина, Ю. Н. Работнова, В. П. Радченко, Ю. П. Самарина, Н. Н. Попова, О. В. Соснина, С. А. Шестерикова, И. Ю. Цвелодуба, J. A. Betten, J. T. Boyle, F. A. Leckie, J. Spence и многих других авторов.

Выделен класс задач, в которых строятся модели, отражающие закритическое неупругое деформирование и разрушения материала, и разрабатываются методы решения соответствующих краевых задач. Решению этой проблемы посвящены работы В. Э. Вильдемана, В. Л. Каткова, В. И. Миронова, В. П. Радченко, Ю. В. Соколкина, В. В. Стружанова, А. А. Ташкинова, Р. Г. Шина и других.

Проанализированы существующие методики и алгоритмы оценки показателей надежности элементов конструкций в условиях ползучести по деформационному критерию отказа и критерию длительной прочности.

По результатам аналитического обзора сформулированы основные задачи диссертационной работы.

Во второй главе рассматривается в условиях ползучести приближенное решение нелинейной краевой задачи о всестороннем растяжении усилиями p бесконечной пластины из стохастически неоднородного материала, ослабленной круговым отверстием радиуса a. Задача решается в полярной системе координат для случая плоского напряженного состояния в предположении, что стохастические неоднородности материала пластины описываются функцией одной переменной (расстояния от центра отверстия r). При этом компоненты тензора скоростей деформаций и тензора напряжений являются также случайными функциями одной переменной r.

В пункте 2.1 дается постановка одномерной стохастической задачи ползучести с использованием определяющих соотношений ползучести, взятых в соответствии с теорией вязкого течения:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) = 0, \tag{1}$$

$$r\frac{d\dot{\varepsilon}_\theta}{dr} + \dot{\varepsilon}_\theta - \dot{\varepsilon}_r = 0, \tag{2}$$

$$\dot{\varepsilon}_r = cs^{n-1}\bar{\sigma}_r H(r), \tag{3}$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta = cs^{n-1}\bar{\sigma}_\theta H(r), \tag{4}$$

$$H(r) = 1 + \alpha U(r), \tag{5}$$

где σ_r, σ_θ — компоненты тензора напряжений; $\bar{\sigma}_r$, $\bar{\sigma}_\theta$ — компоненты девиатора тензора напряжений; ε_θ, ε_r — компоненты тензора деформаций; s — интенсивность напряжений; c, n — постоянные материала; α — число, задающее коэффициент вариации реологичесих свойств материала $(0 < \alpha < 1)$; $U(r)$ — случайная однородная функция, описывающая возмущения реологических свойств материала с математическим ожиданием $\langle U \rangle = 0$ и дисперсией $\langle U^2 \rangle = 1$; точка обозначает дифференцирование по времени; угловыми скобками $\langle \cdot \rangle$ обозначено математическое ожидание.

Случайная функция $U(r)$ выбиралась в виде:

$$U(r) = \lambda_0 J_0(r) + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k J_k(r),$$

где λ_k — независимые случайные величины с математическим ожиданием $\langle\lambda_k\rangle = 0$ и дисперсией $\langle\lambda_k^2\rangle = 1$, $J_k(r)$ — функции Бесселя I рода целого порядка.

Для пластины заданы граничное условие и условие на бесконечности:

$$\sigma_r(a) = 0, \quad \sigma_r(\infty) = p, \tag{6}$$

где a — радиус отверстия, p — равномерно распределенные усилия.

В пункте 2.2 приводится решение краевой задачи (1)–(6) по методу малого параметра. Путем введения новых переменных s (интенсивность напряжений) и φ (угол вида напряженного состояния) по формулам

$$\sigma_r = \frac{2}{\sqrt{3}} s\cos\varphi, \quad \sigma_\theta = \frac{2}{\sqrt{3}} s\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right),$$

краевая задача (1)–(6) сводится к системе стохастических нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\left(\cos^2\varphi + n\sin^2\varphi\right) H\frac{d\varphi}{dr} + \sin\varphi\cos\varphi\frac{dH}{dr} &= \\ = \frac{H}{r}\left(\sqrt{3}\cos\varphi + n\sin\varphi\right)\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)&,\end{aligned} \tag{7}$$

$$\left(\cos^2\varphi + n\sin^2\varphi\right) H\frac{ds}{dr} + s\sin^2\varphi\frac{dH}{dr} = -\frac{2s}{r}H\cos^2\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) \tag{8}$$

с граничными условиями $\varphi(a) = \frac{\pi}{2}$ и условием на бесконечности $s(\infty) = p$.

Линеаризация системы уравнений (7)–(8) производилась на основе первого приближения метода малого параметра. Линейная система решалась численно методом Адамса пятого порядка с переменным шагом. Все расчеты в данной главе производились с помощью пакета прикладных программ `MatLab R2006b`.

В пункте 2.3 проведен статистический анализ случайного поля напряжений. Оценен разброс случайного поля напряжений на границе кругового отверстия. В результате статистического анализа получено, что дисперсия тангенциального напряжения σ_θ принимает наибольшее значение на контуре отверстия, а дисперсия радиального напряжения σ_r на этом контуре равна нулю. Удаляясь от контура отверстия, дисперсии напряжений достаточно быстро приближаются к постоянным значениям, совпадающим с их значениями для бесконечной пластины без отверстия. Был рассмотрен коэффициент вариации $\gamma = \frac{\sqrt{D[\sigma_\theta]}}{\sigma_\theta^0}\cdot 100\%$ на контуре отверстия, где $D[\sigma_\theta]$ — дисперсия, σ_θ^0 — среднее значение тангенциального напряжения. При этом оказалось, что для материалов с высоким показателем нелинейности коэффициент вариации находится в пределах от 1,12% ($\alpha = 0{,}1$) до 5,60% ($\alpha = 0{,}5$). В случае низких показателей нелинейности, когда возможна полная линеаризация закона ползучести ($n = 1$) разброс напряжений значительно больше. Здесь величина γ заключена в пределах от 5,45% ($\alpha = 0{,}1$) до 27,25% ($\alpha = 0{,}5$).

В третьей главе рассматривается решение стохастической нелинейной краевой задачи установившейся ползучести по методу малого параметра для случая плоского напряженного состояния. Предполагается, что структурные неоднородности материала описываются случайной функцией двух переменных x_1 и x_2, поэтому компоненты тензоров скоростей деформаций и напряжений будут также случайными функциями двух переменных.

В пункте 3.1 приведена постановка задачи, которая состоит из уравнения равновесия для компонент тензора напряжений σ_{ij}:

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (i, j = 1, 2)\,, \tag{9}$$

условия совместности для компонент тензора скоростей деформаций $\dot{p}_{ij}$

$$\Lambda_{ij}\Lambda_{kl}\dot{p}_{jk,il} = 0. \tag{10}$$

Здесь Λ_{ij} — единичный антисимметричный псевдотензор.

Определяющие соотношения ползучести принимаются в соответствии с нелинейной теорией вязкого течения в стохастической форме:

$$\dot{p}_{ij} = cs^{n-1}\left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{mm}\right)\big(1 + \alpha U(x_1, x_2)\big), \tag{11}$$

где s — интенсивность напряжений:

$$s^2 = \frac{1}{2}\left(3\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \sigma_{ii}\sigma_{jj}\right);$$

δ_{ij} — символ Кронекера; $U\,(x_1,\, x_2)$ — случайная однородная функция, описывающая возмущения реологических свойств материала с математическим ожиданием $\langle U \rangle = 0$ и дисперсией $\langle U^2 \rangle = 1$; остальные обозначения совпадают с обозначениями главы 2.

На контуре Γ области D, занимаемой пластиной, заданы детерминированные поверхностные силы q_i:

$$\sigma_{ij}n_j|_\Gamma = q_i, \tag{12}$$

где n_j — компоненты единичного вектора нормали к контуру Γ.

В пункте 3.2 приводится решение задачи (9)–(12) по методу малого параметра. Для этого тензор напряжений σ_{ij} представляется в виде суммы двух слагаемых:

$$\sigma_{ij} = \sigma^0_{ij} + \sigma^*_{ij}, \quad \langle\sigma_{ij}\rangle = \sigma^0_{ij}, \quad \langle\sigma^*_{ij}\rangle = 0,$$

где σ_{ij}^0 — детерминированная составляющая, отвечающая детерминированному решению, а σ_{ij}^* — флуктуация напряжений. В дальнейшем статистически и физически нелинейная задача линеаризуется и решается относительно флуктуаций компонент тензора напряжений σ_{ij}^*.

Однородная функция $U(x_1, x_2)$, с помощью которой описывается случайное поле возмущений реологических свойств материала задается почти периодической быстро осциллирующей функцией координат:

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\omega c_k x_1 + \omega d_k x_2 + \varphi_k),$$

где ω — параметр, имеющий размерность, обратную длине ($\omega \gg 1$); c_k, d_k — безразмерные величины порядка единицы; A_k, φ_k — случайные величины, обладающие свойствами: A_k — центрированные случайные величины, φ_k имеет равномерное распределение в интервале $(0; 2\pi)$, причем $\langle A_k \rangle = 0$, $\langle A_k A_l \rangle = 0$, $(k \neq l)$, $\langle \varphi_k \varphi_l \rangle = 0$, $(k \neq l)$, $\langle A_k \varphi_k \rangle = 0$, т.е. все величины A_k и φ_k независимы друг с другом и между собой.

Решение задачи получено в виде суммы двух рядов

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} (v_k + w_k),$$

где ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ представляет собой решение вдали от границы тела без учета краевых эффектов; ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k$ задает при большом параметре $\omega (\omega \gg 1)$ решение типа пограничного слоя, быстро затухающее по мере удаления вглубь области тела.

В пункте 3.3 в качестве примера рассматривается задача о ползучести стохастически неоднородной полуплоскости $x_2 \geq 0$, находящейся в условиях плоского напряженного состояния. К границе полуплоскости $x_2 = 0$ приложены нагрузки

$$\sigma_{22}|_{x_2=0} = \sigma_{22}^0 = \text{const}, \quad \sigma_{12}|_{x_2=0} = 0,$$

а напряжение σ_{11} удовлетворяет условию макроскопической однородности $\langle \sigma_{11} \rangle = \sigma_{11}^0 = \text{const}$, которое соответствует приложению при $x_1 = \pm H$, где H достаточно велико, постоянных по x_2 напряжений σ_{11}^0.

Найдены аналитические выражения для компонент тензора напряжений σ_{ij} и деформаций p_{ij} и их дисперсий. Проведен численный анализ случайных полей напряжений и деформаций в зависимости от показателя нелинейности n, степени неоднородности α и параметра нагружения $h = \frac{\sigma_{22}^0}{\sigma_{11}^0}$. На рис. 1 и 2 приведены типичные графики нормированных дисперсий напряжений и деформаций в зависимости от безразмерной координаты ωx_2 (все величины c_k и d_k приняты равными единице). С ростом ωx_2 дисперсии довольно быстро приближаются к значениям, совпадающим с их значениями для неограниченной среды. Вычислена концентрация напряжений, возникающая на границе полуплоскости x_2, как отношение среднеквадратических отклонений величины σ_{11} при $x_2 = 0$ и $x_2 \to \infty$.

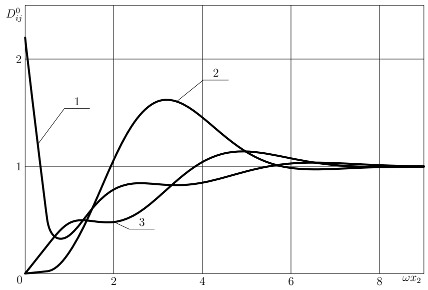

Рис. 1. Нормированные дисперсии напряжений D^0_{ij} при $n = 3$, $h = 0{,}5$: $1 - D^0_{11}$, $2 - D^0_{22}$, $3 - D^0_{12}$

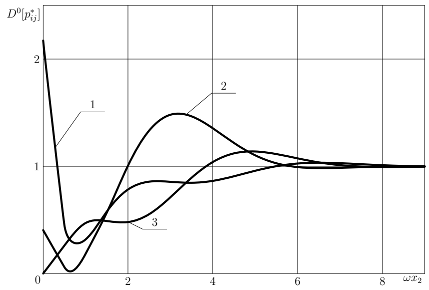

Рис. 2. Нормированные дисперсии деформаций $D^0[p_{ij}]$ при $n = 3$, $h = 0.5$: $1 - D^0[p_{11}]$, $2 - D^0[p_{22}]$, $3 - D^0[p_{12}]$

Установлено, что вблизи границы полуплоскости имеется пограничный слой, в котором разброс напряжений и деформаций достигает заметных величин. Показано, что с ростом параметра нагружения h при фиксированных параметрах материала зона пограничного слоя сужается.

В пункте 3.4 в рассматривается задача о растяжении стохастически неоднородной полосы в условиях ползучести. Считается, что бесконечная полоса $-\infty \leq x_1 \leq \infty$, $-b \leq x_2 \leq b$ растягивается вдоль оси x_1 постоянными напряжениями $\sigma_{11} = \sigma^0$, которые приложены на бесконечности $x_1 \to \pm\infty$, а ее границы $x_2 = \pm b$ свободны от напряжений:

$$\sigma_{22}|_{x_2=\pm b} = 0, \qquad \sigma_{12}|_{x_2=\pm b} = 0.$$

Для данной задачи проведено аналогичное решение и анализ, что и в пункте 3.3. Установлено, что вблизи границ стохастически неоднородной полосы существует пограничный слой, в котором случайные поля напряжений и деформаций существенно отличаются от полей напряжений и деформаций внутренних областей. В материалах с низкой степенью нелинейности ($n \leq 3$) вблизи границ полосы наблюдается концентрация напряжений, при $n > 3$ наблюдается процесс, обратный концентрации напряжений.

В четвертой главе изложено решение задачи нелинейной ползучести стохастически неоднородного полупространства $x_3 \geq 0$ вблизи его границы. При этом предполагается, что полупространство $x_3 \geq 0$ подвергается на бесконечности действию нормальных напряжений $\sigma_{11} = \sigma_{11}^0 = \mathrm{const}$, $\sigma_{22} = \sigma_{22}^0 = \mathrm{const}$, а поверхность $x_3 = 0$ является свободной от напряжений, т. е.

$$\sigma_{i3}|_{x_3=0} = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Пункт 4.1 посвящен постановке пространственной стохастической задачи.

В пунктах 4.2, 4.3 приводится приближенное аналитическое решение пространственной задачи по методу малого параметра аналогично решению двумерной задачи главы 3. В аналитической форме найдены формулы для вычисления случайного поля напряжений, их статистические характеристики, вычислена концентрация напряжений σ_{11} и σ_{22} на границе полупространства в зависимости от параметров материала.

При $n \leq 5$ вблизи границы полупространства максимальный разброс имеют нормальные напряжений σ_{11}, тогда как при больших степенях нелинейности ($n \geq 7$) максимальный разброс имеют касательные напряжения σ_{12}. Установлено, что поле напряжений в некотором узком пограничном слое является статистически неоднородным вдоль оси x_3, т. е. в направлении, нормальном к границе полупространства. Вне этого слоя поле напряжений является однородным, причем оно совпадает с полем напряжений для неограниченной среды.

В пятой главе рассматриваются вероятностные методы оценки прочностной надежности для рассматриваемой в главе 2 пластины с круговым отверстием.

В пункте 5.1 приводится методика расчета на надежность стохастически неоднородной круглой пластины с малым отверстием ($a \leq r \leq b$, $a \ll b$) в условиях ползучести по критерию деформационного типа, базирующаяся на приближенном численном решении стохастической задачи главы 2. Параметрический критерий отказа для рассматриваемой круговой пластины записывается для перемещения $w(r,\, t)$ при заданном его предельном значении w_0. Условие работоспособности считается выполненным, если во всех точках элемента конструкции выполняется соотношение $w(r,\, t) < w_0$. Если хотя бы в одной точке выполняется условие $w(r,\, t) \geq w_0$, то происходит локальный отказ, что приводит к нарушению работоспособности всего элемента конструкции.

Рассматривается задача об оценке надежности пластины с круговым отверстием, когда срок службы определяется моментом времени, в который перемещение достигает заданного значения w_0. Поскольку перемещение любого фиксированного радиуса пластины в условиях установившейся ползучести является возрастающей функцией по t, то для вероятности безотказной работы $P(t)$ на отрезке времени $[0, t]$ имеет место формула:

$$P(t) = P\{\sup_{a \le r \le b} w(r,\, t) < w_0\}.$$

Для вычисления вероятности нахождения случайной функции $w(r,\, t)$ в заданной области в рассматриваемый момент времени, используются соотношения для статистических характеристик (математического ожидания и дисперсии) функции перемещения $w(r,\, t)$. Рассмотрен ряд модельных примеров для исследования показателей надежности круговой пластины в зависимости от параметров материала.

В пункте 5.2 приводится расчет вероятности безотказной работы по критерию длительной прочности для круговой пластины с малым отверстием. Для описания процесса разрушения введен параметр поврежденности материала $0 \le \omega(t) \le 1$ и принята степенная зависимость скорости изменения $\omega(t)$ от эквивалентного напряжения $\sigma_э$:

$$\frac{d\omega}{dt} = B\left(\frac{\sigma_э}{1-\omega}\right)^k,$$

где B, k — постоянные материала. Оценка локальной прочности производится по наибольшему значению эквивалентного напряжения $\sigma_{э\,\max}$. При этом мы получаем нижнюю оценку долговечности элемента конструкции. Эквивалентное напряжение $\sigma_{э\,\max}$ выбирается в соответствии с критерием Сдобырева, который довольно часто применяется для описания закономерности длительной прочности при сложном напряженном состоянии.

В заключении перечислены основные результаты, полученные в диссертационной работе:

1. На основе метода малого параметра построено приближенное численное решение одномерной нелинейной стохастической краевой задачи для плоскости с круговым отверстием в случае плоского напряженного состояния в условиях установившейся ползучести. Показано, что стохастические неоднородности материала могут вызывать значительные флуктуации полей напряжений. Установлено, что коэффициент вариации тангенциального напряжения на границе отверстия принимает наибольшие значения и находится в пределах от 1,12% при $n = 8$ до 27,25% при $n = 1$ на границе отверстия.
2. Разработан аналитический метод решения двумерной стохастически нелинейной краевой задачи установившейся ползучести для плоского напряженного состояния методом малого параметра. На основе аналитического решения проведен статистический анализ случайных полей деформа-

ций и напряжений и выявлено существенное влияние на них показателя нелинейности установившейся ползучести n, степени неоднородности материала α и параметра нагружения $h = \frac{\sigma_{22}^0}{\sigma_{11}^0}$. Вычислена концентрация напряжения σ_{11} на границе полуплоскости для различных параметров материала.

3. На основе линеаризации определяющего соотношения ползучести построено приближенное аналитическое решение нелинейной стохастической краевой задачи ползучести для неоднородного полупространства. Получены аналитические формулы для вычисления дисперсий случайного поля напряжений во всем полупространстве. На основе решения выполнено исследование случайных полей напряжений в условиях установившейся ползучести в зависимости от параметров материала. Найдена концентрация напряжений σ_{11}^* и σ_{12}^* на границе среды $x_3 = 0$ для различных значений степени нелинейности материала n.

   Проведено исследование краевого эффекта, возникшего вблизи границы стохастически неоднородного полупространства в зависимости от степени нелинейности материала n. Получено, что разброс флуктуаций напряжений в пограничном слое может быть намного больше, чем в глубине полупространства.
4. Разработаны методики и алгоритмы расчета на надежность в условиях установившейся ползучести по деформационному критерию отказа и критерию длительной прочности на основе приближенных численных решений стохастической краевой задачи о растяжении круговой пластины с малым отверстием и решен ряд новых модельных задач оценки надежности для некоторых значений параметров материала и внешних нагрузок.

Список публикаций, рекомендованных ВАК

[1] *Коваленко Л. В., Попов Н. Н., Радченко В. П.* Решение плоской стохастической краевой задачи ползучести// *Прикладная математика и механика.* — 2009. — Т. 73, № 6. — С. 1009–1016.

[2] *Попов Н. Н., Коваленко Л. В.* Исследование случайных полей напряжений при ползучести стохастически неоднородной пластины с круговым отверстием // *Обозрение прикладной и промышленной математики.* — 2009. — Т. 16. — С. 378–379.

[3] *Коваленко Л. В., Попов Н. Н.* Моделирование краевого эффекта в задаче о растяжении стохастически неоднородной полосы при ползуче-

сти // *Вестник Самарск. госуд. техн. ун–та. Сер.: Физ.–мат. науки.* — 2009. — Т. 18, № 1. — С. 85–94.

[4] *Коваленко Л. В., Попов Н. Н., Яшин М. А.* Решение плоской нелинейной стохастической задачи ползучести методом спектральных представлений// *Вестник Самарск. госуд. техн. ун–та. Сер.: Физ.–мат. науки.* — 2009. — Т. 19, № 2. — С. 99–106.

[5] *Попов Н. Н., Коваленко Л. В.* Поля напряжений на границе стохастически неоднородной полуплоскости при ползучести // *Вестник Самарск. госуд. техн. ун–та. Сер.: Физ.–мат. науки.* — 2006. — Т. 42. — С. 61–66.

[6] *Попов Н. Н., Коваленко Л. В.* Нелинейная стохастическая задача о растяжении полупространства в условиях ползучести // *Вестник Самарск. госуд. техн. ун–та. Сер.: Физ.–мат. науки.* — 2007. — № 1(14). — С. 56–61.

Список других публикаций

[7] *Коваленко Л. В.* Поля напряжений вблизи границы стохастически неоднородной полуплоскости при ее растяжении в условиях ползучести // Актуальные проблемы современной науки: Труды 2–го Международного форума(7–й Международной конференции молодых ученых и студентов). Сер.: Естественные науки. — Т. 1–3. — Самара: СамГТУ, 2006. — С. 169–171.

[8] *Коваленко Л. В.* Исследование краевых эффектов при ползучести стохастически неоднородных сред // Тезисы докладов XXXIII международн. молодежн. конф. «Гагаринские чтения». — Т. 1. — Москва, 2007. — С. 116–117.

[9] *Коваленко Л. В.* Статистические характеристики полей напряжений вблизи границы стохастически неоднородного полупространства // Тезисы докладов 16 Всероссийской конференции молодых ученых. — Изд–во Пермского государственного технического университета, 2007. — С. 48–49.

[10] *Коваленко Л. В.* Задача о растяжении длинной неоднородной полосы в условиях ползучести // Тезисы докладов XXXIV международн. молодежн. конф. «Гагаринские чтения». — Т. 1. — Москва, 2008. — С. 143–144.

[11] *Коваленко Л. В.* Задача о растяжении узкой стохастически неоднородной полосы // Актуальные проблемы современной науки: Труды 4–го Международного форума(9–й Международной конференции молодых ученых и

студентов). Естественные науки. Сер.:Математика. Математическое моделирование. Механика. — Самара: СамГТУ, 2008. — С. 223–225.

[12] *Коваленко Л. В.* Решение плоской краевой стохастической задачи ползучести // Международн. конф. по математич. физике и ее приложениям «Математическое моделирование физических, технических, экономических, социальных систем и процессов». Тезисы докладов. — 2008. — С. 95–96.

[13] *Коваленко Л. В.* Задача моделирования напряженно–деформированного состояния стохастически неоднородной полосы в условиях ползучести // Труды VII международн. конф. по математич. моделированию «Математическое моделирование физических, технических, экономических, социальных систем и процессов». — Ульяновск, 2009. — С. 125.

[14] *Попов Н. Н., Коваленко Л. В.* Распределение напряжений при растяжении стохастически неоднородной полуплоскости в условиях ползучести // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Третьей Всероссийской научной конференции. — Т. 1. — Самара: СамГТУ, 2006. — С. 170–172.

[15] *Попов Н. Н., Коваленко Л. В.* Решение пространственной стохастической краевой задачи ползучести вблизи свободной поверхности // СамДиф–2007: Всероссийская конференция «Дифференциальные уравнения и их приложения», г. Самара, 29 января–2 февраля 2007 г. Тезисы докладов. — Самара: «Универс групп», 2007. — С. 87–89.

[16] *Попов Н. Н., Коваленко Л. В.* Исследование полей деформаций вблизи границы стохастически неоднородной полуплоскости // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Пятой Всероссийской научной конференции. — Т. 1. — Самара: СамГТУ, 2008. — С. 151–154.

[17] *Попов Н. Н., Коваленко Л. В.* Нелинейная стохастическая задача ползучести с быстро–осциллирующими свойствами материала для плоского напряженного состояния // Тезисы докладов V Всероссийской конференции «Механика микронеоднородных материалов и разрушение». — Екатеринбург, 2008. — С. 120.

[18] *Попов Н. Н., Коваленко Л. В.* Метод оценки надежности плоских элементов конструкций по критерию длительной прочности // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Шестой Всероссийской научной конференции. — Т. 1. — Самара: СамГТУ, 2009. — С. 203–206.