

**Кудинов Игорь Васильевич**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ГИДРОДИНАМИКИ  
ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ НА ОСНОВЕ  
ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ**

Специальность: 05.13.18 Математическое моделирование, численные  
методы и комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации

на соискание ученой степени

кандидата технических наук

Самара 2011

Работа выполнена на кафедре «Прикладная математика и информатика» Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Самарский государственный технический университет»

Научный руководитель – доктор физико - математических наук, профессор  
Радченко Владимир Павлович

Официальные оппоненты: доктор физико - математических наук, профессор  
Жданов Александр Иванович

доктор технических наук, профессор  
Клюев Николай Ильич

Ведущая организация ФГБОУ ВПО «Ульяновский государственный  
технический университет»

Защита состоится «22» декабря 2011 г. в 13:00 часов на заседании Диссертационного совета Д 212.217.03 при ФГБОУ ВПО «Самарский государственный технический университет» по адресу: 443100, г. Самара, ул. Галактионовская 141, корпус 6, ауд. 33.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Самарского государственного технического университета по адресу: г. Самара, ул. Первомайская, 18.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью, направлять по адресу: 443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244, Главный корпус, учёному секретарю Диссертационного совета Д 212.217.03; факс (846) 278-44-00.

Автореферат разослан                    ноября 2011 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета

Н.Г. Губанов

## Общая характеристика работы

**Актуальность работы.** Разработка, исследование, обоснование математических моделей для процессов тепломассопереноса и гидродинамики, а также совершенствование методов, алгоритмов и программного обеспечения для их реализации важны как для развития численных и аналитических методов решения дифференциальных уравнений, описывающих эти процессы, так и для создания эффективной информационной технологии получения, наполнения и прогнозирования новых знаний при исследовании широкого круга линейных и нелинейных явлений с учётом и без учёта конечной скорости распространения разного рода возмущений (тепловых, гидравлических, диффузионных и др.).

Существенным фактором, ограничивающим возможности математического моделирования в области тепломассопереноса, является практическое отсутствие точных аналитических методов исследования нелинейных краевых задач, в том числе гиперболического типа. Привлечение гиперболического дифференциального оператора необходимо при исследовании полей различных потенциалов при сверхмалых значениях времени (обработка материалов лазерным излучением, распределение температуры в начальной стадии теплового удара, нагрев при динамическом распространении трещины, движение космических аппаратов в атмосфере и др.).

Известные недостатки точных аналитических методов заключаются в значительных математических трудностях получения аналитических решений нелинейных краевых задач, задач с переменными физическими свойствами среды, с переменными во времени граничными условиями и др. Получение точных аналитических решений указанных задач оказывается возможным лишь в результате введения ряда допущений, приводящих к существенному отличию математических моделей от реальных физических процессов, подлежащих исследованию. К тому же, эти решения обычно представляются в виде бесконечных рядов, плохо сходящихся в области малых значений временной и пространственной координат, где для сходимости решений требуется использование от сотен тысяч до миллионов членов ряда.

Современные численные методы (переменных направлений, расщепления и прогонки, конечных элементов и др.) позволяют получать решения краевых задач практически любой сложности. Однако их использование связано с наличием высокопроизводительной компьютерной техники, так как требуется выполнение большого количества вычислений, повторяемых при каждом новом наборе исходных данных. При этом значительно усложняется анализ получаемой таким путем информации.

В связи с этим возникает потребность в разработке методов, позволяющих без введения каких-либо существенных допущений получать решения в аналитическом виде, пусть даже ценой выполнения большого количества предварительных вычислительных процедур, связанных с использованием компьютерной техники. Эти методы должны сочетать в себе положительные стороны классических аналитических (аналитический вид решения) и численных (решения сложнейших краевых задач без введения упрощающих допущений) методов при возможности избегать наиболее существенные их недостатки. В этом направлении наиболее эффективными являются методы, в которых используется понятие глубины термического слоя (интегральные методы теплового баланса). Их разработке и развитию посвящены труды Био М., Гудмена Т., Швеца М.Е., Вейника А.И., Беляева Н.М., Дородницына А.А.,

Глазунова Н.Т., Карташова Э.М. и других. Введение при использовании этих методов дополнительных граничных условий во многих случаях позволяет получать приближенные аналитические решения практически с заданной степенью точности. Развитие этих методов применительно к решению сложных линейных и нелинейных краевых задач является актуальной научной проблемой, имеющей большое теоретическое и прикладное значение.

**Цель диссертационной работы** состоит в математическом моделировании процессов теплопроводности и гидродинамики на основе эффективных аналитических и численно-аналитических методов решения краевых задач с использованием интегральных методов теплового баланса, ортогональных методов Канторовича Л.В. и Бубнова-Галеркина, новых алгоритмов и специального программного обеспечения.

Для достижения указанной цели решались следующие задачи.

1. Разработка методов получения точных и приближенных аналитических решений гиперболических уравнений теплопроводности и движения жидкостей, описывающих распределение соответствующих полей потенциалов с учетом конечной скорости распространения возмущений.

2. Построение аналитического решения задач динамического и теплового пограничных слоев при граничных условиях первого и третьего рода на стенке.

3. Разработка численно-аналитического метода решения краевой задачи Стефана с абляцией (при удалении расплавляемого вещества).

4. Разработка и исследование метода получения вихревых полей потенциалов (тепловых, гидравлических, диффузионных и прочих) путем организации движения их источников по круговым орбитам с учетом найденных закономерностей этого движения.

5. Создание математических моделей сложных разветвленных трубопроводных систем (водо- нефте- газо- проводов и проч.) и программного комплекса для исследования процессов, протекающих в реальных системах, с определением давлений, скоростей, расходов и температур движущейся среды.

**Научная новизна** полученных в диссертационной работе результатов заключается в следующем:

1. Разработана новая математическая модель процесса теплообмена с учётом конечной скорости распространения теплоты, позволяющая, в отличие от существующих, снять противоречия, связанные с наличием скачков температуры внутри тела и с появлением отрицательных температур в обратной тепловой волне.

2. На основе введения фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий получены новые численно-аналитические решения задач динамического и теплового пограничных слоев при граничных условиях первого и третьего рода на стенках.

3. На основе использования дополнительных граничных условий с учетом движения фронта температурного возмущения и фронта плавления впервые получено аналитическое решение задачи Стефана с абляцией (с удалением расплавляемого вещества).

4. Теоретически разработан метод получения вихревых полей потенциалов, возникающих при вращении по определенным закономерностям источников этих полей по круговым орбитам.

5. Используя аналогию электрических и гидравлических процессов, на основе двух законов Кирхгофа разработан метод построения компьютерных моделей сложных разветвленных многокольцевых трубопроводных систем, позволяющий рассчитывать давления, скорости, расходы и температуру движущихся сред.

**Практическая значимость работы.** Разработанные в диссертации методы и полученные аналитические решения отличаются заметной простотой конструкции при точности, достаточной для прикладных задач. Такие решения полезны в тех случаях, когда решения задач теплопроводности являются промежуточными стадиями других исследований, например, решения обратных задач, задач термоупругости, автоматизированного управления и проектирования. В частности, полученные в диссертации аналитические решения задач теплообмена при течении жидкостей в трубах и плоских каналах были использованы при разработке математических моделей и программного комплекса для теплосети центрального теплоснабжения г. Саратова (от СарГРЭС и ТЭЦ-5).

Математические модели теплосети и циркуляционной системы Новокуйбышевской ТЭЦ-1 позволили определить давления, скорости, расходы теплоносителя и потери напора в любой точке моделируемых систем, найти наиболее оптимальные режимы текущей работы, выполнить предварительные проекты реконструкций, а также составить планы построения новых участков трубопроводных систем.

Применительно к расчетам температурного состояния труб барабанов котлов Новокуйбышевской ТЭЦ-1 внедрена методика расчета, основывающаяся на введении фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий. Для расчетов температурного состояния труб, представленных в виде многослойных конструкций (тепловая изоляция – металлическая стенка трубы – отложения накипи на внутренней поверхности труб), внедрена методика, основанная на теории обобщенных функций.

**На защиту выносятся следующие основные результаты и положения.**

1. Точные и приближённые численно-аналитические решения гиперболических уравнений теплопроводности, учитывающих конечную скорость распространения возмущений; исследование сходимости и погрешности численно-аналитических решений.

2. Численно-аналитические решения задач динамического и теплового пограничных слоёв при граничных условиях первого и третьего рода на стенке, полученные на основе введения фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий; оценки сходимости и погрешности решений.

3. Численно-аналитическое решение задачи Стефана с абляцией (с удалением расплавляемого вещества), полученное на основе дополнительных граничных условий и учёта движения фронтов температурного возмущения и плавления; оценки сходимости и погрешности решения.

4. Математическая модель вихревых полей потенциалов и численный метод их расчёта, основанный на конечно-разностном методе расщепления и методе прогонки.

5. Программный комплекс для исследования математических моделей сложных разветвленных многокольцевых трубопроводных систем и численный метод их расчё-

та, позволяющий рассчитывать давления, скорости, расходы и температуру движущихся сред.

6. Результаты исследований на основе программного комплекса математической модели теплосети г. Саратова (от Саратовских ТЭЦ-5 и ГРЭС), позволившие установить причины недостаточной эффективности работы теплосети, оптимизировать планы реконструкции и выполнения ремонтных работ.

**Апробация работы.** Основные результаты работы доложены и обсуждены на Всероссийской научной конференции молодых ученых «Наука, технологии, инновации» (г. Новосибирск, 2007 г.); Тринадцатой Международной научно-технической конференции студентов и аспирантов «Радиоэлектроника, электротехника и энергетика» (г. Москва, 2007 г.); Четырнадцатой Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Современные техника и технологии» (г. Томск, 2008 г.); Третьей молодежной Международной научной конференции «Тинчуринские чтения» (г. Казань, 2008 г.); Седьмой Международной конференции «Математическое моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов» (г. Ульяновск, 2009 г.); Шестой, Седьмой и Восьмой Всероссийских научных конференциях с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (г. Самара, 2009, 2010, 2011 гг.); в Школе-семинаре молодых ученых и специалистов под рук. акад. РАН А.И. Леонтьева «Проблемы газодинамики и теплообмена в аэрокосмических технологиях» (г. Москва, 2009, 2011 гг.); в Школе-семинаре молодых ученых и специалистов под рук. акад. РАН В.Е. Алемасова «Проблемы теплообмена и гидродинамики в энергомашиностроении» (г. Казань, 2010 г.); на научном семинаре «Прикладная математика и механика» Самарского государственного технического университета под рук. профессора Радченко В.П. в 2010 и 2011 гг.

**Связь диссертационной работы с планами научных исследований.** Представленная работа является обобщением теоретических и экспериментальных исследований, выполненных автором в Самарском государственном техническом университете. Исследования проводились по планам госбюджетных тематик Минвуза РФ № 1.18.09 «Получение аналитических решений задач теплопроводности на основе теории обобщенных функций и дополнительных граничных условий», № 1.21.11 «Разработка методов получения точных аналитических решений дифференциальных уравнений гиперболического типа», а также по Аналитической ведомственной целевой программе «Развитие научного потенциала высшей школы», тематический план НИР № 551/02 «Разработка нового направления получения аналитических решений задач математической физики на основе введения фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий».

Результаты работы использовались при выполнении энергетического аудита Самарского государственного технического университета, хозяйственных работ с Волжской территориальной генерирующей кампанией, с Куйбышевским и Новокуйбышевским нефтеперерабатывающими заводами, ОАО «Самараоргсинтез».

Экономический эффект, подтвержденный соответствующим актом внедрения, приведенным в приложениях диссертации, составляет 3 миллиона рублей.

**Обоснованность выносимых на защиту научных положений, выводов и рекомендаций**, а также достоверность полученных автором результатов подтверждается соответствием математических моделей физическим процессам, протекающим в энергетических системах, сравнением полученных в диссертации результатов с точными аналитическими решениями, с приближенными решениями других авторов, с результатами численных расчетов и натурных экспериментов.

**Публикации.** Материалы диссертации опубликованы в 38 печатных работах. В автореферате приведено 26 основных научных работ, из которых 9 статей – в рецензируемых журналах из перечня ВАК, 5 статей опубликованы в центральных и академических изданиях. По результатам исследований опубликованы две монографии, одна из которых – в центральном издательстве «URSS».

**Личный вклад автора.** Работы [7, 10, 20, 26] выполнены самостоятельно. В основных работах [1 – 6, 8, 9, 11] диссертанту принадлежит постановка проблем исследований, непосредственное выполнение основной части работы, которая выполнена совместно с другими авторами. В остальных работах [12 – 19, 21 – 25], также опубликованных в соавторстве, диссертанту в равной степени с другими авторами принадлежат постановки задач, получение решений, содержание работы и анализ результатов.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, шести глав, выводов, списка используемой литературы, приложений; изложена на 150 страницах основного машинописного текста и 31 странице приложений, содержит 74 рисунка, 6 таблиц. Список использованной литературы включает 93 наименования.

## **Краткое содержание работы**

**Во введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения, приведена структура диссертационной работы, а также сведения об апробации работы и публикациях.

**В первой главе диссертации** представлен обзор работ по избранному направлению исследований и выполнен их анализ. В частности, отмечено, что существующие решения, полученные с помощью точных аналитических методов, выражаются громоздкими бесконечными функциональными рядами, плохо сходящимися в окрестностях малых значений временной и пространственной координат. Например, при нахождении решений краевых задач теплопроводности для сверхмалых значений времени (длительностью от нано- до фемтосекунд) для обеспечения сходимости ряда необходимо использовать сотни тысяч, а иногда и миллионы членов ряда. Такие формулы малоприспособлены в случаях, когда решение температурной задачи является промежуточным этапом решения каких-либо других задач (термоупругости, обратных задач теплопроводности и др.).

В обзоре указывается, что большой интерес представляют приближенные аналитические методы, позволяющие получать решения, хотя и приближенные, но в аналитическом виде, причем с точностью, во многих случаях достаточной для инженерных приложений. Разработке и развитию таких методов посвящены труды

Л.В. Канторовича, С.Г. Михлина, П.В. Цоя, Н.М. Беляева, Ю.Т. Глазунова, Э.М. Карташова, Е.В. Стефанюк и др.

Следует однако отметить, что, несмотря на определенный прогресс, эти методы пока еще недостаточно развиты применительно к решению нелинейных задач, задач теплопроводности для многослойных конструкций, задач с переменными физическими свойствами среды и граничными условиями теплообмена. Среди важнейших нерешенных проблем можно отметить ниже следующие.

1. Плохая обусловленность матриц коэффициентов систем алгебраических линейных уравнений, к решению которых обычно приводит использование приближенных аналитических методов (Ритца, Бубнова-Галеркина, коллокаций, Треффтца, наименьших квадратов и др.).

2. В ряде методов краевая задача сводится к решению различных интегральных уравнений (Вольтерра, Фредгольма, интегралу теплового баланса и др.), даже точные решения которых приводят к выполнению исходных дифференциальных уравнений лишь в среднем.

3. При получении приближенных аналитических решений для большого числа приближений относительно собственных чисел получают характеристические уравнения высокой степени, решения которых, если они возможны, имеют низкую точность.

**Во второй главе диссертации** представлены результаты исследований, связанных с получением точных и приближенных аналитических решений гиперболических уравнений теплопроводности. И, в частности, показано, что параболическому оператору теплопроводности соответствует только строго определенный класс изотермических кривых, выход за пределы которых невозможен путем одного лишь расширения начальных и граничных условий. Поэтому невозможно получить изотермы, несвойственные параболическому оператору, одним лишь изменением этих условий – путь, по которому происходило развитие теории теплообмена. Именно этот путь и приводит к парадоксам теории теплопроводности (бесконечная скорость распространения теплоты и бесконечная величина теплового потока при тепловом ударе) и некорректно поставленным задачам, когда решение либо не единственно, либо не существует, либо неустойчиво. Все это связано с ограниченностью параболического оператора теплопроводности, при выводе которого подразумевается, что температура является плавной функцией координат и времени. Однако существуют действительные реальные процессы, имеющие так называемые фронтовые поверхности, при переходе через которые искомая функция и ее производные имеют скачок. Такие функции описываются, например, гиперболическими дифференциальными операторами.

Математическая постановка задачи теплопроводности для бесконечной пластины при симметричных граничных условиях первого рода с учетом конечной скорости распространения теплового возмущения имеет вид:

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} + Fo_r \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo^2} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} \quad (Fo > 0; \quad 0 \leq \xi < 1); \quad (2.1)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 1; \quad (2.2)$$

$$\partial \Theta(\xi, 0) / \partial Fo = 0; \quad (2.3)$$

$$\partial \Theta(0, Fo) / \partial \xi = 0; \quad (2.4)$$



$$\Theta(1, Fo) = 0, \quad (2.5)$$

где  $Fo_r = a \tau_r / \delta^2$  – время релаксации;  $\Theta = (t - t_{ct}) / (t_0 - t_{ct})$  – относительная избыточная температура;  $\xi = x / \delta$  – безразмерное время;  $Fo = a \tau / \delta^2$  – безразмерное время.

Полученное в диссертации точное аналитическое решение задачи (2.1) – (2.5) имеет вид (2.6).

$$\Theta_k(\xi, Fo) = \sum_{k=1}^{\infty} [C_{1k} \exp(z_{1k} Fo) + C_{2k} \exp(z_{2k} Fo)] \cos\left(r \frac{\pi}{2} \xi\right) \quad (r = 2i - 1; \quad i = k = 1, 2, \dots), \quad (2.6)$$

где

$$z_{ik} = \left(-1 \pm \sqrt{1 - 4Fo_r v_k}\right) / (2Fo_r) \quad (i = 1, 2; \quad k = 1, 2, \dots); \quad C_{1k} = -C_{2k} \frac{z_{2k}}{z_{1k}}; \quad C_{2k} = \pm \frac{4}{r\pi} \left(1 - \frac{z_{2k}}{z_{1k}}\right)$$

(знак «плюс» берётся при  $r = 1, 5, 9, 13, \mathbf{K}$ ; «минус» – при  $r = 3, 7, 11, 15, \mathbf{K}$ ).

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что все исходные уравнения задачи (2.1) – (2.5) удовлетворяются точно. В качестве примера на рис. 2.1 представлено распределение температуры при  $Fo_r = 6,25 \cdot 10^{-3}$ .

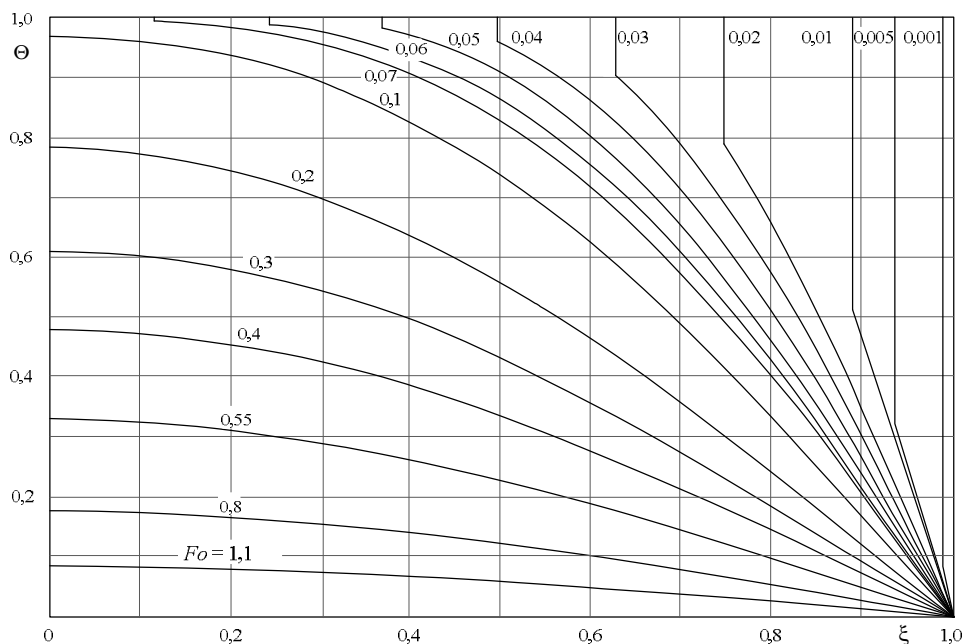


Рис. 2.1. Распределение температуры в пластине с учетом конечной скорости распространения теплоты при  $Fo_r = 6,25 \cdot 10^{-3}$  по формуле (2.6)

Анализ результатов, представленных на рис. 2.1, позволяет сделать вывод о том, что при малых значениях времени  $Fo$  и пространственной координаты  $\xi$  на фронте температурного возмущения наблюдается скачок температуры от величины температуры на фронте тепловой волны до начальной температуры. Область тела, находящаяся за пределами фронта тепловой волны, оказывается невозмущенной и температура здесь равна начальной температуре.

Температура на фронте тепловой волны описывается формулой  $t(\tau) = t_0 - \exp[-\tau / (2\tau_r)]$ , полностью совпадающей с соотношением для температуры на фронте, полученным в работах А.В. Лыкова и К. Баумейстера, где решения были найдены для полупространства.

Отмечается линейная закономерность движения фронта тепловой волны по пространственной координате во времени:  $x_{\phi} = \delta - Wt$ . Этот факт подтверждается исследованиями К. Баумейстера.

После достижения на фронте волны температуры  $\Theta = 1,0$  полученные по формуле (2.16) результаты полностью совпадают с решением параболического уравнения теплопроводности.

Следует отметить, что сходимость ряда (2.6) существенно зависит от величины числа Фурье, для которого необходимо определять распределение температуры по толщине пластины. Например, для задачи с приведенными выше исходными данными в диапазоне числа Фурье  $0,1 \leq Fo < \infty$  для сходимости с погрешностью в 0,01 % от точного решения достаточно всего нескольких членов этого ряда. При  $0,0001 \leq Fo \leq 0,1$  сходимость имеет место при  $10 \div 1000$  членах ряда. Для всех чисел Фурье, при которых происходит скачок в температурных кривых, число членов ряда (2.16), необходимых для его сходимости, существенно возрастает (от 10000 при  $Fo = 10^{-5}$  до 1000000 при  $Fo = 10^{-8}$ ). При дальнейшем уменьшении числа Фурье количество членов ряда (2.16) может достигать нескольких миллионов.

Обнаруженный из решения (2.6) скачок температурных кривых свидетельствует о возникновении изотерм внутри тела. Кроме того, исследования решения (2.6) позволяют сделать вывод о наличии отрицательных температур в обратной тепловой волне (см. рис. 2.2). Все эти факты свидетельствуют о том, что уравнение (2.1) неадекватно уравнению теплового баланса ввиду того, что не выполняется принцип максимума (по А.Н. Тихонову).

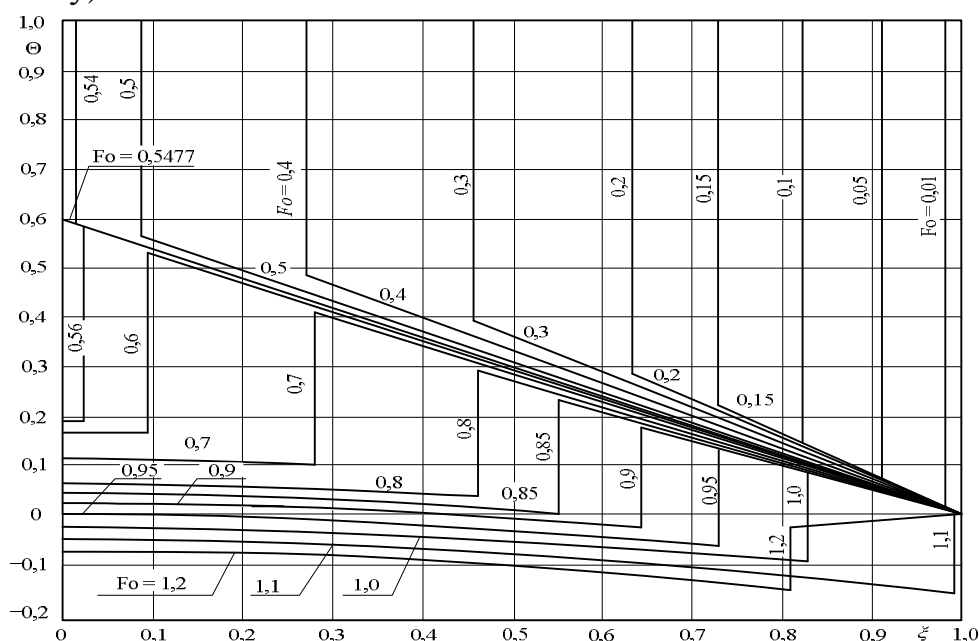


Рис. 2.2. Изменение температуры в пластине с учетом конечной скорости распространения теплоты при  $Fo_r = 0,3$  по формуле (2.6)

Для преодоления указанных трудностей в диссертации была предложена формула для теплового потока

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \lambda \tau_r \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial \tau} - \tau_r \frac{\partial q}{\partial \tau}, \quad (2.7)$$

в которой учитывается релаксация во времени не только теплового потока, но и градиента температуры.

На основе формулы (2.7) с использованием уравнения теплового баланса выведено следующее гиперболическое уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} + Fo_r \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo^2} = \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2} + Fo_r \frac{\partial^3 \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi^2 \partial Fo} \quad (r = 2k - 1; \quad k = 1, 2, \dots). \quad (2.8)$$

В диссертации приводится точное аналитическое решение уравнения (2.8) при симметричных граничных условиях первого рода, которое имеет вид

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ [C_{1k} \exp(z_{1k} Fo) + C_{2k} \exp(z_{2k} Fo)] \cos\left(r \frac{\pi}{2} \xi\right) \right\}, \quad (2.9)$$

где 
$$z_{ik} = \frac{-(1 + Fo_r v_k) \pm \sqrt{(1 + Fo_r v_k)^2 - 4Fo_r v_k}}{2Fo_r} \quad (i = 1, 2; \quad k = 1, 2, \dots); \quad C_{1k} = -C_{2k} \frac{z_{2k}}{z_{1k}}$$

( $k = 1, 2, \dots$ );  $C_{2k} = \pm \frac{4}{r\pi} \left(1 - \frac{z_{2k}}{z_{1k}}\right)$  (знак «плюс» берётся при  $r = 1, 5, 9, 13, \mathbf{K}$ ; «минус» – при  $r = 3, 7, 11, 15, \mathbf{K}$ ).

Анализ решения (2.9) позволяет сделать вывод об отсутствии скачков и отрицательных значений температур внутри рассматриваемой области.

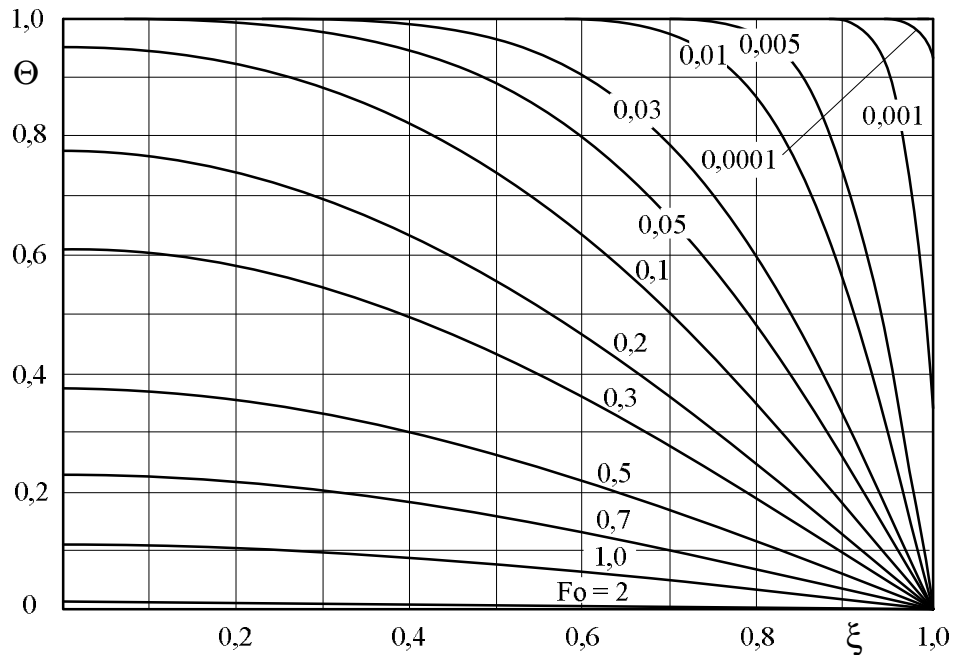


Рис. 2.3. Изменение температуры в пластине с учетом конечной скорости распространения теплоты при  $Fo_r = 0,001$  по формуле (2.8)

**В третьей главе диссертации** представлены результаты разработки метода решения задач теплообмена с учетом перемещения фронта плавления (задача Стефана с абляцией) на основе введения фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий.

Во многих технических процессах возникает необходимость определения температурного состояния тел при наличии процессов плавления, кристаллизации, сублимации и проч. Математическое моделирование таких процессов сводится к решению задач с подвижной границей (задачи Стефана). Сложность их решения состоит в том,

что наряду с определением температуры вещества, находящегося в различных фазах, требуется также находить закон перемещения фронта фазового перехода с учетом выделяющейся (или поглощаемой) при этом теплоты.

В задачах Стефана с абляцией искомыми величинами являются распределение температуры в остающемся (нерасплавленном) слое вещества и закон перемещения фронта фазового перехода во времени. Для их определения особенно эффективными оказываются методы, основанные на введении фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий. В этом случае кроме фронта фазового перехода необходимо определять еще закономерность перемещения во времени фронта температурного возмущения (глубину прогретого слоя).

Подобная задача с использованием интегрального метода теплового баланса решается в два этапа. На первом этапе рассматривается задача о прогреве тела от начальной температуры  $T_0$  до температуры плавления  $T_{пл}$  на его поверхности. На втором этапе задача решается уже с учетом перемещения фронта плавления.

Математическая постановка задачи определения температурного состояния для полубесконечного тела при граничных условиях первого рода до момента достижения температуры плавления на его поверхности имеет вид

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2} \quad (\tau > 0; \quad 0 \leq x < \infty); \quad (3.1)$$

$$T(x, 0) = T_0; \quad -\lambda \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = F,$$

где  $F$  – тепловой поток, Вт/м<sup>2</sup>,  $T_0$  – начальная температура, °С;  $a$  – коэффициент температуропроводности, м<sup>2</sup>/с.

В диссертационной работе задача (3.1) решена для четырнадцати приближений. Решение, например, в третьем приближении имеет вид:

$$T(x, \tau) = T_0 + \frac{F\delta}{\lambda} \left[ \frac{3}{10} - \frac{x}{\delta} + \left(\frac{x}{\delta}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\delta}\right)^4 + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{\delta}\right)^5 \right], \quad (3.2)$$

где  $\delta(\tau) = T_0 + F \sqrt{27 a \tau / 20} / \lambda$  – глубина (толщина) прогретого слоя (фронт температурного возмущения). Из (3.2) получаем формулу для определения температуры на поверхности тела

$$T(0, \tau) = T_0 + F \sqrt{27 a \tau / 20} / \lambda. \quad (3.3)$$

Отличие решения (3.3) в третьем приближении от точного составляет 2,6 %. Решение в четырнадцатом приближении отличается от точного менее чем на 1 %. Для получения таких решений использовались дополнительные граничные условия, определяемые по следующим общим формулам, справедливым для любого числа приближений:

$$\partial^n T(0, \tau) / \partial x^n = 0; \quad \partial^{n-1} T(\delta, \tau) / \partial x^{n-1} = 0; \quad \partial^n T(\delta, \tau) / \partial x^n = 0 \quad (n = 7, 9, 11, \dots).$$

После того как температура на поверхности  $x=0$  становится равной температуре плавления, наступает второй этап теплообмена с учетом перемещения фронта плавления. Отметим, что фронт температурного возмущения  $\delta(\tau)$  при  $\tau = \tau_{пл}$ , имеющий в момент времени начала плавления некоторую конкретную величину, определяется из решения задачи (3.1).

Математическая постановка задачи для второго этапа теплообмена имеет вид

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2} \quad (\tau > 0; \quad 0 \leq x < \infty); \quad (3.4)$$

$$T(x, 0) = T_H(x); \quad (3.5)$$

$$T(s, \tau) = T_{пл}; \quad (3.6)$$

$$T(\delta, \tau) = T_0; \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial T(\delta, \tau)}{\partial x} = 0; \quad (3.8)$$

$$F + \lambda \frac{\partial T(s, \tau)}{\partial x} - Q\rho \frac{ds}{d\tau} = 0, \quad (3.9)$$

где  $s(\tau)$  – перемещение фронта плавления во времени;  $T_{пл}$  – температура плавления;  $Q$  – теплота фазового перехода;  $\rho$  – плотность;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности.

Начальное распределение температуры  $T_H(x)$  находится из решения задачи (3.1). Например, в первом приближении оно имеет вид

$$T_H(x) = T_0 + F(x - \delta(\tau_{пл}))^2 / (2\lambda\delta(\tau_{пл}))^2. \quad (3.10)$$

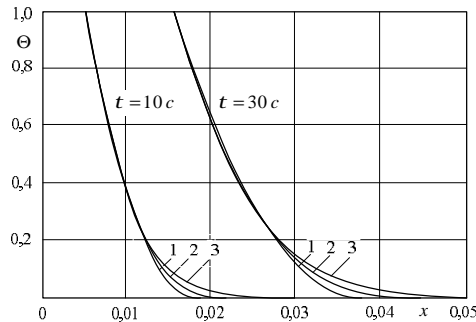
В диссертации получено следующее аналитическое решение задачи (3.4) – (3.9):

$$\Theta(x, \tau) = k \frac{(\delta - x)^{2k}}{(\delta - s)^{2k}} - (k - 1) \frac{(\delta - x)^{2k+1}}{(\delta - s)^{2k+1}} \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.11)$$

Результаты расчетов по формуле (3.11) приведены на рис. 3.1. Исходные данные для решения задачи были следующими:

$$\lambda = 0,19 \text{ Вт/(м к)}; \quad Q = 60000 \text{ Дж/кг}; \quad \rho = 1600 \text{ кг/м}^3; \\ T_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}; \quad T_{пл} = 80 \text{ }^\circ\text{C}; \quad F = 50000 \text{ Вт/м}^2; \quad a = 1,35 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Рис. 3.1. Изменение температуры в диапазоне  $s(\tau) \leq x \leq \delta(\tau)$ : 1, 2, 3 – соответственно первое, второе и четырнадцатое приближения



Анализ результатов, связанных с задачей Стефана, позволяет сделать вывод, что температурное поле рассматриваемого тела заключено между двух фронтов – фронта плавления и фронта температурного возмущения, движущихся с различными скоростями во времени. Важным является тот факт, что разработанный в третьей главе метод позволяет выполнять оценку температурного состояния для сверхмалых значений временной и пространственной координат.

**В четвертой главе диссертации** приводятся результаты исследований, связанных с получением аналитических решений задач для ламинарного динамического (уравнения Прандтля) и теплового (уравнения Польгаузена) пограничных слоев, которые соответственно имеют вид:

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}; \quad (4.1) \quad v_x \frac{\partial t(x, y)}{\partial x} + v_y \frac{\partial t(x, y)}{\partial y} = a \frac{\partial^2 t(x, y)}{\partial y^2}, \quad (4.2)$$

где  $v_x, v_y$  – составляющие скорости по осям  $x$  и  $y$ ;  $\nu$  – кинематическая вязкость;  $t$  – температура;  $a$  – коэффициент температуропроводности.

Граничные условия для уравнений (4.1) и (4.2) по форме идентичны и, например, для уравнения (4.1) они имеют вид

$$(v_x = v_y)_{y=0} = 0; \quad (v_x)_{y=\delta(x)} = v = const; \quad \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} = 0; \quad \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right)_{y=0} = 0, \quad (4.3)$$

где  $\delta(x)$  – толщина динамического пограничного слоя.

Для получения решения уравнения (4.1), (4.2) путем их осреднения сводятся соответственно к интегральным уравнениям Кармана и Г.Н. Кружилина:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} v_x (v_x - v) dy = \nu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0}; \quad (4.4)$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} v_x (T_{cp} - T(x, y)) dy = a \frac{\partial T(x, 0)}{\partial y}, \quad (4.5)$$

где  $T(x, y) = t(x, y) - t_{cr}$ ;  $T_{cp} = t_{cp} - t_{cr}$ .

Решение интегральных уравнений (4.4), (4.5) с соответствующими граничными условиями вида (4.3) принималось в виде ряда, неизвестные коэффициенты которого находились из основных (4.3) и дополнительных граничных условий, задаваемых на фронте динамического (теплового) возмущения или, что то же самое, на границах пограничных слоев.

Полученные аналитические решения позволили уточнить критериальные уравнения для коэффициентов теплоотдачи и касательных напряжений.

В диссертации также получено решение задачи для теплового пограничного слоя в случае, когда вместо граничного условия первого рода на стенке задано граничное условие третьего рода. Результаты расчетов для этой задачи в сравнении с известным точным решением Шлихтинга, полученным численным методом, отличаются менее, чем на 1 % и представлены на рис. 4.1.

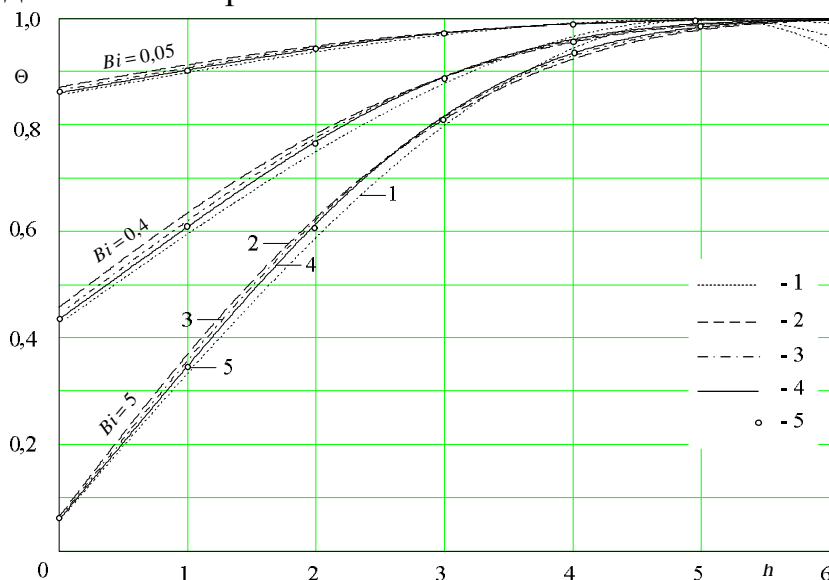


Рис. 4.1. Распределение температур  $\Theta = T/T_{cp}$  от координаты  $\eta = y\sqrt{v/vx}$ . 1, 2, 3, 4 – соответственно первое, второе, третье, четвертое приближения; 5 – точное решение:  $Bi = \alpha\sqrt{vx}/\nu/\lambda$ ;  $Pr = 0,72$

**В пятой главе диссертации** рассматриваются проблемы, связанные с разработкой способов получения вихревых полей потенциалов различной природы (температурных, диффузионных, фильтрационных, электрических и др.). В частности, показано, что для получения вихревых полей потенциалов в замкнутом цилиндрическом или сферическом пространстве необходимо организовать вращение источников этих полей по круговой орбите. При этом скорость вращения источников строго связана со скоростью распространения потенциалов указанных полей.

Для получения вихревого температурного поля было организовано вращение теплового источника по круговой орбите. Математическая постановка задачи в данном случае имеет вид:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T(x, y, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T(x, y, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, \tau)}{\partial y^2}; \quad (5.1)$$

$$T(x, y, 0) = T_0; \quad (5.2)$$

$$T(x_r, y_r, \tau) = T_0 + T_m \sin(\omega\tau - \psi), \quad (5.3)$$

где  $T_0$  – начальная температура;  $T_m$  – амплитуда колебаний температуры стенки;  $x_r, y_r$  – граничные значения координат цилиндрической камеры;  $\omega = 2\pi\nu$ ;  $\nu$  – частота колебаний;  $\psi$  – сдвиг фазы колебаний каждого последующего источника относительно предыдущего.

Декартова система координат в задаче (5.1) – (5.3) для цилиндрической камеры была принята для удобства решения этой задачи численным методом расщепления и прогонки. Исходные данные для решения модельной задачи (5.1) – (5.3) были приняты следующими:  $a = 6 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ ;  $R = 0,36 \text{ м}$  – радиус цилиндра;  $T_0 = 50 \text{ }^\circ\text{C}$ ;  $T_m = 250 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Имитацию вращения источника выполняли 146 источников теплоты, расположенных по окружности цилиндрической камеры. Изменение температуры в точках расположения источников соответствовало соотношению (5.3). Величина сдвига фазы колебаний каждого последующего (по часовой стрелке) источника по отношению к предыдущему была принята равной  $\psi = 1/146$ .

Распределение изотерм при  $\tau = 100 \text{ с}$  (квазистационарное состояние) дано на рис. 5.1. Их анализ позволил установить, что изотермы имеют вихревой характер распределения. При этом происходит вращение изотерм в окружном направлении при одновременном их перемещении к центру цилиндра в радиальном направлении. Следует отметить, что движение тепловых потоков происходит по вихревым линиям, причем в противоположных направлениях в различных ветвях этих линий.

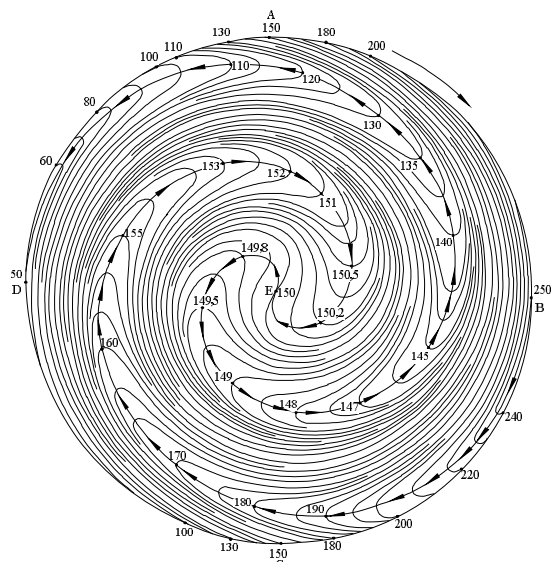


Рис. 5.1. Распределение изотерм  $T = \text{const}$  в цилиндре ( $\tau = 100$  с, квазистационарное состояние):  $\longrightarrow$  — направление движения тепловых потоков

В шестой главе диссертации приводится программный комплекс по разработке компьютерных моделей трубопроводных систем различного назначения (теплосетей, циркуляционных систем, нефтепроводов и проч.). Программный комплекс предназначен для создания компьютерных моделей трубопроводных систем и проведения многовариантных расчетов для различных режимов их работы. Подобные модели позволяют выполнять большое число вычислительных экспериментов путем изменения входных данных и состава работающего оборудования. При этом имеется возможность выполнять проекты новых участков трубопроводных систем с оценкой влияния изменения параметров системы на распределение давлений и скоростей течения среды.

В диссертации приводится инструкция по использованию программы расчеты гидравлических систем, в которой дается общая характеристика программы, последовательность формирования элементов расчетной схемы (узлы сети, участки сети, насосы, запорные устройства и проч.), рекомендации по установке программы на компьютере, структура меню, действия, выполняемые программой.

В основе построения моделей лежат два закона Кирхгофа, справедливые как для электрических, так и для гидравлических сетей. При построении таких моделей использовались полученные в диссертации аналитические решения краевых задач для динамического и теплового пограничных слоев. Благодаря этим решениям были найдены коэффициенты сопротивления трения (при решении динамических задач) и коэффициенты теплоотдачи на границе жидкость-стенка.

В диссертации даны результаты построения компьютерной модели теплосети объединенного централизованного теплоснабжения г. Саратова (от Саратовской ТЭЦ-5 и Саратовской ГРЭС). Результаты расчетов выводятся как в цифровом, так и в графическом виде. Например, распределение давлений для участка теплосети г. Саратова приведено на рис. 6.1.



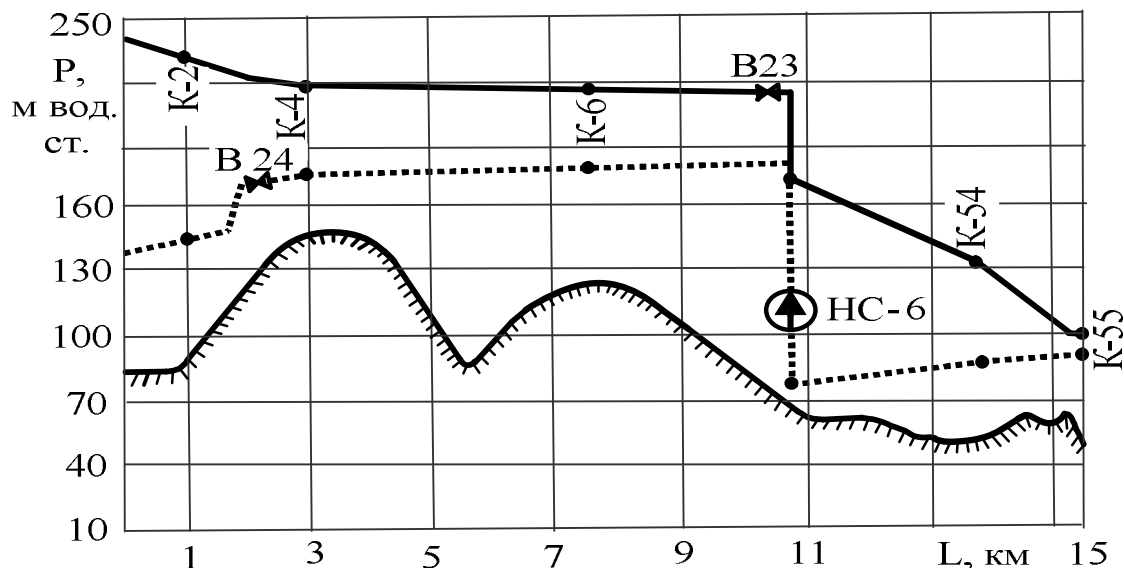


Рис. 6.1. Эпюры распределения давлений в прямой и обратной магистралях первого вывода ТЭС-5

Расчеты, выполненные на основании предложенных моделей, показали крайне нерациональное распределение потребителей теплоты по конкретным ее источникам, неоптимальное «дерево» из тепловых выводов, построенное в Саратовских тепловых сетях, низкую эффективность вновь построенного участка трубопровода ТЭС-5 длиной 4,5 км и диаметром 1200 мм.

**В заключении** перечислены основные результаты, полученные в диссертационной работе.

1. Разработана новая математическая модель процесса теплообмена с учётом конечной скорости распространения теплоты, позволяющая, в отличие от существующих, снять противоречия, связанные с наличием скачков температуры внутри тела и с появлением отрицательных температур в обратной тепловой волне. На основе совместного использования методов Фурье и ортогонального метода Бубнова-Галеркина получены точные аналитические решения гиперболических уравнений теплопроводности для пластины при симметричных граничных условиях первого рода. Впервые показано, что процесс теплообмена с учетом конечной скорости распространения теплового возмущения (с учетом инерционности теплового потока) характеризуется чередованием прямых и обратных тепловых волн, на каждой из которых имеет место скачок температуры.

2. Используя интегральные методы теплового баланса на основе использования фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий разработан метод решения сложных линейных и нелинейных краевых задач тепломассопереноса, позволяющий получать решения для сверхмалых значений временной и пространственной координат.

3. На основе использования дополнительных граничных условий с учетом движения фронта температурного возмущения и фронта плавления впервые получено аналитическое решение задачи Стефана с абляцией (с удалением расплавляемой среды). Исследования показали практически линейный характер изменения фронта плавления во времени. При этом скорость перемещения фронта плавления возрастает с увеличением теплового потока на поверхности плавления и уменьшается с увеличением теплоты фазового перехода (теплоты плавления).

4. На основе введения фронта динамического (температурного) возмущения с использованием дополнительных граничных условий с заданной степенью точности получены приближённые аналитические решения нелинейных краевых задач для ламинарного динамического и теплового пограничных слоев при граничных условиях первого и третьего рода на плоской стенке.

5. Разработаны теоретические основы метода получения вихревых полей потенциалов (тепловых, диффузионных, электрических и прочих), основанного на организации вращения источников этих полей по круговым орбитам. Выполненные в диссертации применительно к вихревому температурному полю исследования позволили установить, что распределение температур и тепловых потоков внутри окружности вращения источника имеет вихревой характер. Причем движение тепловых потоков, возникающих от выравнивания минимумов и максимумов температур происходит в противоположных направлениях.

6. Построена математическая модель теплосети централизованного теплоснабжения г. Саратова от Саратовской ТЭЦ-5 и ГРЭС и разработано программное обеспечение для её реализации. В основе построения модели лежат два закона Кирхгофа и теория графов. Модель позволяет определять давления, скорости, расходы и температуры теплоносителя в любой точке теплосети в текущий момент времени. Выполненные на модели исследования показали, что построенное в теплосетях «дерево» теплосети является неоптимальным, что приводит к значительным потерям напора, проявляющимся в уменьшении располагаемого перепада давлений между прямым и обратным трубопроводом.

### **Список монографий:**

[1] *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Аналитические методы теплопроводности // Монография. Самара: Самарский государственный архитектурно-строительный университет. 2011. – 272 с.

[2] *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Методы решения параболических и гиперболических уравнений теплопроводности // Монография. – М.: Книжный дом «Либроком», 2012. – 270 с.

### **Список основных публикаций в рецензируемых журналах из перечня ВАК:**

[3] *Аверин Б.В., Стефанюк Е.В., Кудинов И.В.* Получение аналитического решения уравнений гидродинамического пограничного слоя на основе введения дополнительных граничных условий // Известия Самарского научного центра Российской Академии наук. Специальный выпуск. «Актуальные вопросы тепло- и массообмена, энергоэффективность, исследование вихревых закрученных потоков». – 2008. – С. 39 – 46.

[4] *Стефанюк Е.В., Кудинов И.В., Ларгина Е.В.* Построение приближенных аналитических решений нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений на основе использования дополнительных граничных условий // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. – № 1 (18). – 2009. – С. 122 – 132.

[5] *Стефанюк Е.В., Кудинов И.В.* Построение аналитических решений уравнений динамического и теплового пограничных слоев // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Технические науки. – № 2 (24). – 2009. – С. 205 – 211.

[6] *Радченко В.П., Кудинов И.В.* Получение аналитических решений нелинейных задач теплопроводности на основе введения дополнительных граничных условий // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. – № 1 (20). – 2010. – С. 161 – 170.

[7] *Кудинов И.В.* Использование компьютерной модели для проектирования тепловых сетей // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Технические науки. – № 4 (27). – 2010. – С. 174 – 181.

[8] *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Об одном методе получения точного аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности на основе использования ортогональных методов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. – № 5 (21). – 2010. – С. 159 – 170.

[9] *Стефанюк Е.В., Кудинов И.В.* Получение аналитического решения уравнения теплового пограничного слоя на основе введения дополнительных граничных условий // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева. – № 1 (21). – 2010. – С. 174 – 184.

[10] *Кудинов И.В.* Построение компьютерных моделей систем теплоснабжения больших городов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Технические науки. – № 1 (29). – 2011. – С. 212 – 219.

[11] *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Теоретические основы получения вихревых полей потенциалов // Известия РАН. Энергетика. – № 1. – 2011. – С. 105 – 112.

## **В других изданиях:**

[12] *Стефанюк Е.В., Кудинов И.В.* Аналитические решения уравнений динамического и теплового пограничного слоя при граничных условиях первого и третьего рода // Проблемы газодинамики и теплообмена в аэрокосмических технологиях: Труды XVII Школы-семинара молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН Леонтьева А.И. Т.2. – Жуковский: ЦАГИ, 2009. – С. 139 – 142.

[13] *Кудинов И.В., Еремин А.В.* Аналитическое решение уравнений теплового пограничного слоя с учетом диссипации энергии // Проблемы теплообмена и гидродинамики в энергомашиностроении. Материалы докладов VII Школы-семинара молодых ученых и специалистов под руководством академика РАН Алемасова В.Е. – Казань: КГТУ, 2010. – С. 184 – 187.

[14] *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Теплообмен при течении Куэтта с учетом диссипации энергии // Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ. Энергетика. – 2011. – № 2. – С. 43 – 51.

[15] *Кудинов В.А., Кудинов И.В.* Математическое моделирование процессов теплообмена и фазовых превращений с учетом абляции // Инженерно-физический журнал. Т. 84. – 2011. – № 5. – С. 1065 – 1074.

[16] *Стефанюк Е.В., Кудинов И.В., Ларгина Е.В.* Обобщенные функции в задачах теплопроводности для многослойных конструкций // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Математическая. – 2008. – № 2 (8). – С. 41 – 56.

[17] *Аверин Б.В., Кудинов И.В., Ларгина Е.В., Еремин А.В.* Обобщенные функции в нелинейных задачах теплопроводности для многослойных конструкций // Повышение энергоэффективности зданий и сооружений. Межвузовский сборник научных трудов. Самара: СГАСУ. – 2009. – С. 45 – 52.

[18] *Кудинов И.В., Ларгина Е.В., Еремин А.В., Будыльников М.Н.* Теплообмен в плоском канале с учётом диссипации энергии // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Математическая. – 2009. – №2 (10). – С. 38 – 47.

[19] *Кудинов И.В., Ларгина Е.В., Котов В.В., Биктагирова Е.Ю.* Дополнительные граничные условия в задачах теплопроводности с переменными физическими свойствами среды // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Математическая. – 2009. – №2 (10). – С. 48 – 55.

[20] *Кудинов И.В.* Аналитические решения уравнений теплового пограничного слоя с учетом диссипации энергии // Повышение энергоэффективности зданий и сооружений. Межвузовский сборник научных трудов. Самара: СГАСУ. – Вып. 5. – 2010. – С. 146 – 150.

[21] *Стефанюк Е.В., Кудинов И.В., Ларгина Е.В.* Математическое моделирование теплопроводности в многослойных конструкциях на основе теории обобщенных функций // Математическое моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов. Сборник трудов Седьмой Международной конференции. Ульяновск: УлГУ. – 2009. – С. 254.

[22] *Стефанюк Е.В., Кудинов И.В.* Математические модели гидродинамического и теплового пограничных слоев с учетом дополнительных граничных условий // Математическое моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов. Сборник трудов Седьмой Международной конференции. Ульяновск: УлГУ. – 2009. – С. 255.

[23] *Стефанюк Е.В., Кудинов И.В., Ларгина Е.В.* Построение аналитических решений уравнений динамического и теплового пограничных слоев // Математическое моделирование и краевые задачи. Сборник трудов Шестой Всероссийской научной конференции с международным участием. Часть 2. – Самара: СамГТУ. – 2009. С. 187 – 191.

[24] *Кудинов И.В., Ларгина Е.В., Еремин А.В., Будыльников М.Н.* Теплообмен в плоском канале с учетом диссипации энергии // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Часть 2. – Самара: СамГТУ. – 2010. – С. 148 – 152.

[25] *Кудинов И.В., Ларгина Е.В., Котов В.В., Биктагирова Е.Ю.* Математическое моделирование теплопроводности при переменных физических свойствах среды // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Часть 2. – Самара: СамГТУ. – 2010, С. 163 – 167.

[26] *Кудинов И.В.* Получение приближённого аналитического решения задачи Стефана с удалением расплавляемой среды // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Часть 2. – Самара: СамГТУ. – 2011. – С. 66 – 72.

Заказ № 1109. Формат 60 x 84 1/16. Уч. изд. л. 1,00. Тираж 100 экз.

Отпечатано в типографии Самарского государственного технического университета  
443100, Самара, Молодогвардейская, 244, корпус 8.

Автореферат отпечатан с разрешения диссертационного совета Д 212.217.03  
ФГБОУ ВПО «Самарский государственный технический университет»  
(протокол № 6 от 16 ноября 2011 г.)