На правах рукописи

Кузнецов Владимир Валерьевич

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕГАУССОВЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ МОМЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

05.13.18 – Математическое моделирование,

численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата технических наук

Самара 2010

Работа выполнена на кафедре «Прикладная математика и информатика» Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Самарский государственный технический университет»

Научный руководитель доктор физико-математических наук, профессор,
Радченко Владимир Павлович

Официальные оппоненты доктор физико-математических наук, профессор
Кудинов Василий Александрович

Заслуженный работник высшей школы РФ,
доктор технических наук, профессор
Прохоров Сергей Антонович

Ведущая организация **Самарский государственный университет**,
г. Самара.

Защита состоится «29» июня 2010 г., в 9 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.217.03 ГОУ ВПО Самарский государственный технический университет (СамГТУ) по адресу: г. Самара, ул. Галактионовская, 141, корпус №6, аудитория 28

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Самарского государственного технического университета по адресу: г. Самара, ул. Первомайская, 18

Отзывы по данной работе в двух экземплярах, заверенные печатью, просим направлять по адресу: 443100, г. Самара, Молодогвардейская ул. 244, СамГТУ, главный корпус, ученому секретарю диссертационного совета Д 212.217.03; факс: (846) 278-44-00; e-mail: D21221703@list.ru

Автореферат разослан 26 мая 2010 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 212.217.03 Губанов Н.Г.

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Интерес к стохастическому описанию всевозможных динамических систем закономерен и обусловлен возрастающими требованиями к прогнозированию поведения таких систем. Наиболее разработанным и часто применяемым методом исследования стохастических систем является так называемое «корреляционное решение», суть которого заключается в том, чтобы для неизвестной случайной функции получают моменты первого и второго порядков – математическое ожидание случайного процесса (СП) и корреляционную функцию (КФ2) соответственно. Корреляционное решение является точным решением лишь тогда, когда исследуемый процесс является нормальным (гауссов процесс), а в других случаях – оно дает лишь приближение к решению. Для негауссовых процессов актуальной является разработка методов уточнения корреляционного приближения.

При анализе стохастических задач важной составной частью исследований является получение необходимого статистического материала (выборки), необходимого для нахождения оценок требуемых параметров и моментов случайных функций (СФ). Обычно выборка получается путем измерения («оцифровки») некоторых величин, связанных с реализациями случайных процессов.

Современные измерительные средства, позволяющие достаточно просто получать в натурном эксперименте данные о СП, сами по себе являются некоторыми фильтрами, искажающими (преобразующими) статистические свойства реальных СП. В некоторых случаях эти искажения незначительны, но иногда, во избежание больших ошибок, эти искажения нужно учитывать. Одно из наиболее распространенных преобразований, используемых при обработке реализаций случайного процесса – нахождение так называемого «скользящего среднего» значения реализации, также называемой «осреднением реализации».

Разработка способов учета искажений статистических свойств реальных СП, появляющихся в процессе измерений (преобразования) СП, является также весьма актуальной проблемой.

Целью диссертационной работы является построение математических моделей негауссовых случайных процессов, позволяющих получать необходимые уточнения (моменты высших порядков) к корреляционному приближению, исследование и анализ на их основе преобразований СП при помощи операции интегрального осреднения с целью корректировки моментных функций различного порядка преобразованного СП.

Для достижения данной цели в диссертационной работе решаются следующие задачи:

– разработка математической модели для установления связи характеристик осредненного случайного процесса, полученного путем нахождения интегрального среднего значения исходного (реального) СП, с вероятностными характеристиками самого реального случайного процесса;

– исследование корректности найденных решений, нахождение условий, при которых данные решения адекватно отражают реальные свойства СП;

– исследование свойств корреляционных функций третьего (КФ3) и n-го (КФn) порядков и их использование в качестве поправок к корреляционному приближению;

– разработка методов описания негауссовых случайных процессов, учитывающих информацию о моментах высшего порядка и позволяющих существенно обобщить и уточнить решения задач в корреляционном приближении;

– разработка программного комплекса для моделирования негауссовых СП на основе моментных функций высших порядков.

Научная новизна полученных в диссертационной работе результатов заключается в следующем:

– разработаны новые математические модели описания стационарных негауссовых процессов, позволяющие (в отличии от существующих методов) уточнить и обобщить корреляционное решение задачи за счет использования моментных функций более высокого порядка;

– разработаны математические модели учета погрешностей корреляционных функций любого порядка, возникающие при преобразовании осреднения стационарной случайной функции; получены расчетные формулы, позволяющие корректировать аналитические выражения корреляционных функций стандартных типов, в зависимости от параметра осреднения; проведено изучение области изменения параметра осреднения стационарных случайных процессов (ССП) и установлена допустимая область, в которой модификация корреляционных функций является корректной;

– впервые выполнен детальный математический анализ свойств корреляционных функций n-го порядка и установлено иерархическое строение множества корреляционных функций различных порядков; на основе свойства иерархической структуры КФn разработан эффективный способ нахождения корреляционных функций произвольного порядка с помощью экспериментального материала (выборки);

– предложена методика использования информации, предоставленной корреляционными функциями высших порядков, для нахождения совместного закона распределения ординат $\{X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)\}$ стационарного случайного процесса $X(t)$.

– разработан пакет прикладных программ, реализующий быстрое и эффективное получение информации о корреляционных функциях произвольного порядка, и корректировки данных, прошедших преобразование осреднения, который апробирован на конкретных данных, связанных с потреблением электрической нагрузки промышленных предприятий, рассмотрены конкретные примеры из практики, показывающие преимущества разработанного в диссертационной работе подхода.

Практическая и научная ценность представленной работы заключается в применении новых подходов к описанию стационарных случайных процессов, являющихся негауссовыми. Предложенная методика позволяет (в отличие от существующих методов) уточнить корреляционное решение задачи за счет использования моментных функций более высоких порядков.

Повышение точности и адекватности решения поставленных задач достигается путем разработанной методики определения статистических моментов высших порядков. Это позволяет достаточно хорошо аппроксимировать совместные законы распределения ординат искомой ССФ путем представления совместной плотности распределения частичной суммой некоторого бесконечного ряда.

Исследовано влияние операции осреднения ССП на статистические свойства получаемых затем оценок параметров случайных функций и предложены достаточно простые формулы и соотношения для исправления погрешностей, вносимых измерительной аппаратурой. Применение этих соотношений показывает их высокую эффективность в инженерной практике статистических расчетов.

Разработанный пакет прикладных программ позволяет использовать полученные в работе результаты, обеспечивая тем самым более полное описание встречающихся на практике ССП, а также получать все необходимые данные о реальных случайных функциях из достаточно представительной выборки.

Достоверность основных полученных результатов подтверждается следующим:

– корректностью вводимых гипотез и допущений, использующихся при построении математической модели, и строгостью в использовании математического аппарата;

– сравнением полученных теоретических результатов и следствий из них с известными аналитическими решениями, тестовыми примерами и имеющимися экспериментальными данными;

– использованием полученных теоретических моделей для численного моделирования реальных стохастических систем, встречающихся в инженерной практике, в частности, при расчете случайных электрических нагрузок;

– преемственностью полученных новых теоретических и практических результатов с известными сведениями, когда существующие классические знания являются частным случаем новых теоретических представлений.

На защиту выносятся следующие основные положения:

– математические модели описания стационарных негауссовых процессов, позволяющие уточнить и обобщить корреляционное решение задач за счет использования моментных функций более высокого порядка;

– методика оценки погрешностей преобразования осреднения ССП, приводящих к погрешностям в определении корреляционной функции n-го порядка;

– методика исследования свойств корреляционных функций высших порядков, взаимосвязи корреляционных функций различных порядков с целью уточнения информации о статистических свойствах ССП, не являющихся гауссовыми;

– методика аппроксимации законов распределения ординат ССП на основе использования корреляционных функций высших порядков;

– программное и математическое обеспечение и вычислительный комплекс обработки выборочных данных для получения корреляционных функций высших порядков и учета погрешностей осреднения ССП.

Реализация и внедрение результатов работы. Результаты, методы, выводы и рекомендации диссертационной работы использованы в учебном процессе ГОУ ВПО «Самарский государственный технический университет» на кафедре «Прикладная математика и информатика», в ЗАО «ОРГНЕФТЕХИМЭНЕРГО» г. Самары (предприятие ОАО «Сызранский НПЗ») и в ООО «Меридиан Групп» г. Самара.

Апробация работы. Основные положения диссертации докладывались и обсуждались:

– на 8-й Международной конференции (3-го Международного форума) молодых ученых «Актуальные проблемы современной науки» (г. Самара, 2007 г.);

– на 5-й Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи» (г. Самара, 2008 г.);

– на 9-й Международной конференции молодых ученых «Актуальные проблемы современной науки» (г. Самара, 2008 г.);

– на 2-й Международной научно-практической конференции «Современные проблемы гуманитарных и естественных наук» (г. Москва, 2010 г.);

– на X-й Международной конференции «Информатика: проблемы, методология, технологии» (г. Воронеж, 11-12 февраля, 2010 г.);

– на VIII Международной научно-практической конференции «Фундаментальные и прикладные исследования в системе образования» (г. Тамбов, 26 февраля, 2010 г.).

– на 7-й Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (г. Самара, 2010 г.)

Публикации. По теме диссертации опубликовано 12 работ (из них 3 работы в изданиях из перечня ВАК).

Личный вклад автора. Автору во всех работах, опубликованных в соавторстве, принадлежат в равной степени постановки задач, а также результаты выполненных исследований. Лично автору принадлежит также разработка практических приложений, алгоритмизация и разработка программного комплекса.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения, списка литературы и приложений, в которых приведены используемые экспериментальные данные и акты внедрений. Общий объем диссертации 241 страниц, включая 86 рисунков и 5 таблиц. Библиографический список содержит 162 наименования.

Краткое содержание работы

Во введении обоснована актуальность исследуемых проблем, сформулированы цели, основные научные и прикладные задачи диссертационной работы. Аргументируется научная новизна и практическая значимость работы, приводятся основные положения, выносимые на защиту.

В первой главе приводится аналитический обзор и постановка задач исследования. Рассмотрение стохастических проблем в прикладном смысле выделено как основная цель работы.

В пункте 1.1 кратко анализируются возникающие во многих областях практической деятельности стохастические задачи, история их становления, заслуги отечественных ученых, таких как А.Н. Колмогоров, В.С. Пугачев, И.Н. Синицын, Р.Л. Стратонович, В.И. Бунимович, В.И. Тихонов, А.Н. Малахов и многих других в создании и развитии раздела знаний – «Стохастические системы».

Отмечены ученые и научные школы, имеющие большие заслуги в исследовании стохастических систем в различных областях. Так например, в механике сплошных сред известны школы, сформировавшиеся под влиянием работ В.В. Болотина, В.А. Ломакина, Ю.П. Самарина, Ю.В. Соколкина, В.П. Радченко и многих других.

В разработке стохастических систем для моделирования электроснабжения промышленных предприятий отмечены работы Э.Г. Куренного, А.К. Шидловского, Г.М. Каялова, С.Д. Волобринского, Г.Я. Вагина и других.

Изложены аспекты корреляционного решения задач, как наиболее употребляемого в настоящее время математического инструмента. Отмечено, что простота модели в корреляционной теории зачастую идет в ущерб точности решения. Априорное предположение о «гауссовости» исследуемого СП допустимо лишь в частных случаях. Предположение же о том, что исследуемый СП не является нормальным, вносит несоответствие в годами налаженные инженерные схемы и документацию, которые были ориентированы на использование только корреляционной теории.

Таким образом, в современных условиях идеализация классической корреляционной теории уже не всегда соответствует требованиям к точности решения стохастических задач. В предлагаемой диссертационной работе для негауссовых стохастических систем предлагается уточнять корреляционную теорию нахождением корреляционных функций высших (чем второй) порядков:

$$K(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \mathbf{M}[(X(t_1) - m(t_1))\,(X(t_2) - m(t_2)) \cdots (X(t_n) - m(t_n))],$$

где $\{X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)\}$ – совокупность сечений случайной функции $X(t)$.

В пункте 1.2 рассмотрена проблема искажения корреляционных функций процедурой регистрации СП. Формулируется общая постановка задачи учета искажения стохастических характеристик СП, прошедшего преобразование осреднения.

В пункте 1.3 предлагается план построения приближения для законов распределения ординат негауссова СП, основанный на использовании корреляционных функций высших порядков.

Во второй главе рассмотрены основные аспекты первичной обработки данных, применительно к теории случайных функций в электроэнергетике. Рассмотрены реальные модели случайных процессов потребления электрической нагрузки промышленными предприятиями, сформулированы основные теоретические проблемы, возникающие при моделировании случайных процессов, и пути их преодоления.

В пункте 2.1 в строгом соответствии с нормами математической статистики исследуются различные статистические гипотезы (о нормальности СП, о стационарности СП). Анализируются различные модели, определяющие структуру СП, и эти модели апробируются на имеющемся экспериментальном материале. Для каждой модели составляется методика выделения стационарной составляющей случайного процесса.

Результаты статистической обработки позволяют утверждать, что, вообще говоря, процесс изменения электрической нагрузки не является стационарным в широком смысле. Это можно объяснить тем, что потребление электрической нагрузки зависит от многих факторов, не все из которых имеют стационарный характер (сезонность, сменность работы, нестационарность отдельных производственных операций и т.д.). Отмечается, что и в других стохастических системах часто можно встретить ситуации, когда исследуемый процесс не является стационарным. В этом случае становится важной возможность представления случайных процессов в аналитическом виде, содержащем стационарные случайные функции. Результаты статистических исследований позволяют утверждать, что для случайного процесса потребления электрической нагрузки такие представления могут иметь место.

Проверка случайных функций на нормальность для разных моделей показала, что в некоторых случаях можно считать их нормальными; тем не менее, в целом это утверждение не имеет твердой статистической обоснованности. Это обстоятельство делает актуальной задачу уточнения корреляционного решения стохастических задач, по крайней мере, для расчета и проектирования систем электроснабжения.

В пункте 2.2 предложена методика определения оценки корреляционной функции стационарного случайного процесса с использованием методов спектрального анализа. Кроме большей точности, по сравнению с традиционными способами, данная методика позволяет найти также и функцию спектральной плотности. Здесь также предложены математические модели для выделения стационарной составляющей процессов потребления электрической нагрузки.

В третьей главе изучается изменение вероятностных свойств случайных процессов, прошедших преобразование осреднения.

В пункте 3.1 анализируется математическая конструкция одного из аналого-цифровых преобразований ССП при его регистрации, которое имеет вид

$$Y_\theta(t) = \frac{1}{q}\int_t^{t+q} X(t)dt , \qquad (1)$$

где $X(t)$ – реальная (измеряемая) СФ, $Y_\theta(t)$ – интегральное среднее от $X(t)$ за интервал времени θ с переменной точкой t. Функция $Y_\theta(t)$ называется осредненным или сглаженным СП. Имеющаяся всегда возможность изменять θ (параметр осреднения) вносит тем самым коррективы в конструкцию преобразования (1).

Обычно на практике известны вероятностные свойства случайной функции $Y_\theta(t)$, которые получены после обработки данных, согласно (1). Свойства же реальной случайной функции $X(t)$ неизвестны. Возникает задача определения (пересчета) статистических характеристик реального ССП $X(t)$ по известным характеристикам осредненного ССП $Y_\theta(t)$. Так как математическое ожидание (постоянная величина) отрабатывается преобразованием (1) без искажений, то рассматривается искажение корреляционной функции $K(t)$ ССП $X(t)$.

В пункте 3.2 при помощи (1) получено разностное уравнение

$$K(t - q) - 2K(t) + K(t + q) = q^2 K_q''(t)$$

для определения КФ2 $K(t)$ по известной КФ2 $K_q(t)$ для ССП $Y_\theta(t)$, решение которого имеет вид:

$$K(t) = q^2 \sum_{n=1}^{\infty} nK_q''(t + nq) . \qquad (2)$$

Решение (2) по сути является решением обратной задачи, когда по известной характеристике выходного сигнала динамической (стохастической) системы определяется (восстанавливается) входная характеристика системы. Поэтому требуется проверка корректности решения (2). Частным случаем (2) является искажение данным линейным преобразованием дисперсии ($t = 0$) некоторого сечения ССП $X(t)$.

В пункте 3.3 рассмотрены преобразования стандартных видов КФ2 процедурой осреднения (1), используемых в различных приложениях при прогнозировании случайных процессов. Стандартными считаются следующие КФ2:

$$K_q(t) = s_q^2 e^{-a|t|}, \qquad (3)$$

$$K_q(t) = s_q^2 e^{-a|t|}\cos bt , \qquad (4)$$

$$K_q(t) = s^2 e^{-a|t|}\left(\cos bt + \frac{a}{b}\sin b\,|t|\right), \qquad (5)$$

$$K_q(t) = s_q^2 e^{-a|t|}\left(1 + a\,|t|\right), \qquad (6)$$

$$K_q(t) = s_q^2 e^{-a|t|}\left(\cos bt - \frac{a}{b}\sin b\,|t|\right), \qquad (7)$$

$$K_q(t) = s_q^2 e^{-a|t|}\left(1 - a\,|t|\right). \qquad (8)$$

В (2) – (8) считается, что $a > 0$, $b > 0$.

Пусть, например, КФ2 осредненного процесса $Y_\theta(t)$ имеет вид (4). Тогда при помощи соотношений (2) и (4), получим:

$$K(t) = D\left(\cos bt + c\sin b\,|t|\right)e^{-a|t|}, \tag{9}$$

где обозначено:

$$D = \frac{s_q^2 e^{-x}}{d}\left[\left(x^2 - y^2\right)a + 2xyb\right], \quad x = aq, \quad y = bq,$$

$$a = \left(1 + e^{-2x}\right)\cos y - 2e^{-x}, \quad b = \left(1 - e^{-2x}\right)\sin y,$$

$$c = \frac{2xya - \left(x^2 - y^2\right)b}{\left(x^2 - y^2\right)a + 2xyb}, \quad d = \left(1 - 2e^{-x}\cos y + e^{-2x}\right)^2.$$

Выражение для отношения корреляционных функций будет иметь вид:

$$\frac{K(t)}{K_q(t)} = \frac{D}{s_q^2}\left(1 + c\,\mathrm{tg}\,b|t|\right). \tag{10}$$

Соотношение (10) может быть источником поправочных коэффициентов для исправления погрешности осреднения.

Из (10) легко получить отношение дисперсий.

$$\frac{K(0)}{K_q(0)} = q(x,y) = e^{-x}\,\frac{(x^2 - y^2)\left[\left(1 + e^{-2x}\right)\cos y - 2e^{-x}\right] + 2xy\left(1 - e^{-2x}\right)\sin y}{\left(1 - 2e^{-x}\cos y + e^{-2x}\right)^2}.$$

В пункте 3.4 предлагается методика проверки корректности решения (2), основанная на свойствах КФ2. Не всякая функция (2), являющаяся решением разностного уравнения, будет на самом деле корреляционной функцией какой-то ССФ. Она, кроме того, должна удовлетворять условиям: 1) $K(0) > 0$, 2) $K(-t) = K(t)$, а также,

$$3)\left|K(t)\right| \le K(0), \quad 4)\, S(w) = \frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jwt}K(t)\,dt \ge 0. \tag{11}$$

Выбор физически реализуемых решений (2) основывался на использовании условий (11). Эта задача впервые была рассмотрена для КФ2 стандартных видов, а именно, найдены области допустимых значений параметра осреднения q, которые проиллюстрированные графически.

Так, например, если осредненная корреляционная функция имеет вид (4), то условие сохранения свойств (11) после преобразования (1), приводит к системе неравенств относительно параметра осреднения q:

$$\left|\cos bt + c\sin b\,|t|\right| \le e^{a|t|}, \quad x\left[\left(x^2 - y^2\right)a + 2xyb\right] \ge y\left|2xya - \left(x^2 - y^2\right)b\right|,$$

некоторые решения которой для конкретных значений параметров a и b изображены на рис. 1.

В пункте 3.5 полученные общие теоретические результаты применяются для одной из задач, важной для расчетов электрических нагрузок – для вычисления расчетного максимума P_m нагрузки:

$$P_m = P_{cp} + b\ s,$$

где P_{cp} – среднее значение стационарной электрической нагрузки $P(t)$ (для примера оно взято равным 100 квт.), s^2 – дисперсия нагрузки, b – так называемая кратность меры рассеяния.

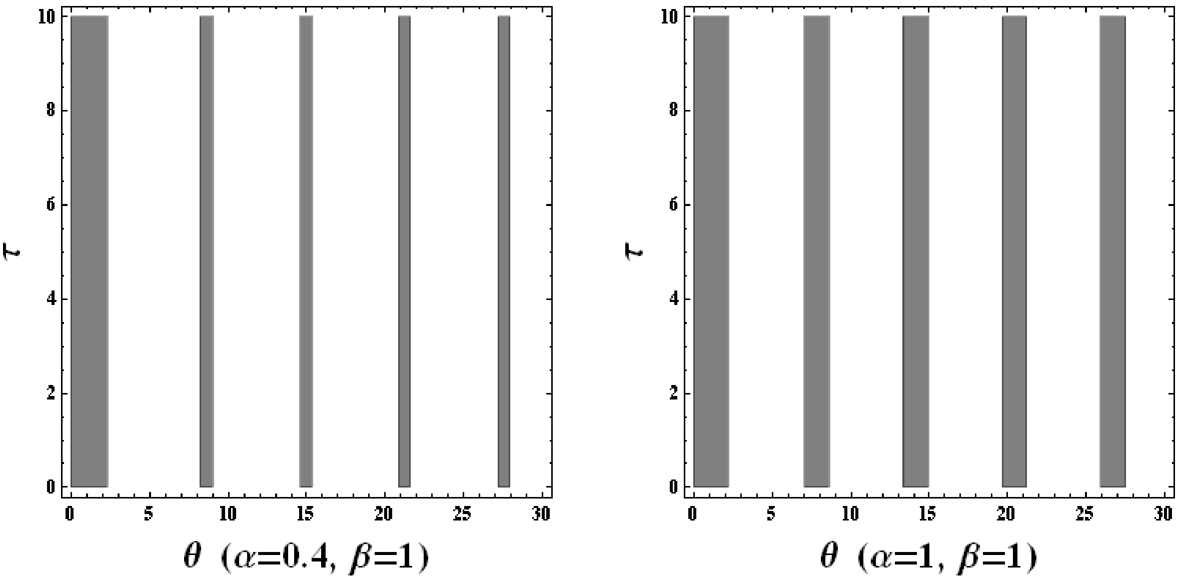

Рисунок 1 – Области допустимых значений q

В частности, если конкретная КФ2 осредненного процесса равна

$$K_q(t) = 1500e^{-0,4|t|}\cos 0,7t$$

и мера рассеяния взята равной 1,73, то расчетный максимум P_{mq} для осредненной нагрузки $P_q(t)$, равен:

$$P_{mq} = 100 + 1,73\sqrt{1500} = 167.$$

Учитывая искажения при осреднении КФ2, соотношение для вычисления расчетного максимума P_m процесса $P(t)$ будет выглядеть так:

$$P_m = 100 + 1,73\frac{\sqrt{1500e^{-0,4q}\left[\left((0,4q)^2-(0,7q)^2\right)a+0,56q^2b\right]}}{1-2e^{-0,4q}\cos(0,7q)+e^{-0,8q}},$$

где

$$a=\left(1+e^{-0,8q}\right)\cos(0,7q)-2e^{-0,4q},\quad b=\left(1-e^{-0,8q}\right)\sin(0,7q).$$

На рис. 2 показано изменение относительной погрешности

$$d(q) = |P_{mq} - P_m|/P_m$$

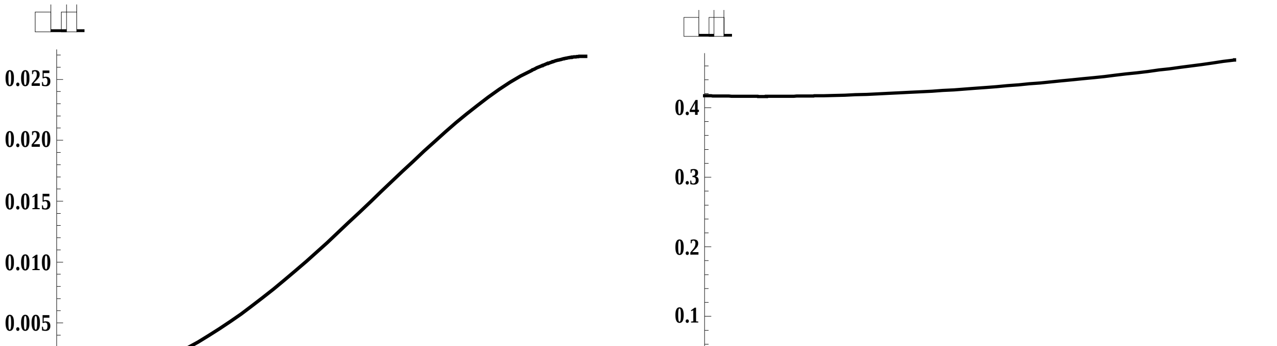

Рисунок 2 – Изменение относительной погрешности для расчетного максимума

при разных величинах q для приведенного примера. Для других корреляционных функций относительная погрешность $d(q)$, зависящая от параметра осреднения q, может достигать величин равных 0,6 при больших значениях параметра осреднения.

В примерах, рассмотренных в главе 3, показано также завышение расчетной дисперсии при игнорировании погрешностей осреднения. Это завышение может быть значительным и приводит к неоправданному перерасходу материальных затрат, связанных, например, с увеличением площади сечения электрических проводников.

В четвертой главе рассматриваются негауссовы ССП и вводятся корреляционные функции произвольного порядка.

В пункте 4.1 вводятся корреляционные функции третьего порядка, указываются способы их получения, их роль для получения более полной информации о случайном процессе.

В пункте 4.2 исследуются корреляционные функции третьего порядка. Подробно обсуждаются их свойства с целью установления взаимосвязи корреляционных функций разных порядков. Устанавливается глубокая связь между корреляционными функциями, например, второго и третьего порядков. Знание КФ2 $K(t)$ позволяет получить семейство линий уровня КФ3 $K(a, b)$, которые имеют вид:

$$K(a) + K(b) + K(b - a) = \text{const}. \qquad (12)$$

Аналогичные соотношения выполняются и для КФ других порядков. Основываясь на данной иерархии корреляционных функций, в работе предложен новый метод обработки статистических данных, основанный на использовании понятия линий уровней для КФn и алгебраических свойств самой КФn. Этот метод позволяет минимизировать объем необходимых вычислений для определения оценки КФn при наличии представительной выборки реализаций ССП. Например, для нахождения КФ3 достаточно найти оценки

$$K(a_1, 0) = \mathbf{M}[(X(t) - m)^2 (X(t + a_1) - m)]$$

при различных (достаточно только положительных) значениях a_1. Проводя серию экспериментов, можно с достаточной для приложений подробностью идентифицировать $K(a, b)$.

В пункте 4.3 подробно описана конфигурация линий уровня КФ3 при заранее заданных КФ2 стандартных типов. Проанализированы свойства симметрии поверхностей КФ3.

В пункте 4.4 впервые поставлена и решена задача об оценке изменения функции КФ3 $K(a, b)$ для ССП, прошедшего операцию осреднения (1). Получено соотношение связи между $K(a, b)$ и $K_q(a, b)$:

$$K_q(t_1,t_2,t_3) = \frac{1}{q^3}\iint\limits_{D_1}\Big\{\big[|t_3-t_1|-g+q\big]\Big[K(b,g)+K\big(b-2|t_2-t_1|,g-2|t_3-t_1|\big)\Big]+$$
$$+\big[b-|t_2-t_1|\big]\Big[K\big(b-2|t_2-t_1|-q,g-2|t_3-t_1|-q\big)+K(b-q,g-q)\Big]+$$
$$+\big[g-b-|(t_3-t_1)-(t_2-t_1)|\big]\times$$
$$\times\Big[K(b,g-q)+K\big(b-2|t_2-t_1|,g-2|t_3-t_1|-q\big)\Big]\Big\}\,db\,dg = K_q(t_2-t_1,\, t_3-t_1),$$

причем область интегрирования определяется так:

$$D_1 = \{(b, g):\ b + t_3 - t_1 - (t_2 - t_1) \le g \le (t_3 - t_1) + q,\ \ t_2 - t_1 \le b \le t_2 - t_1 + q\}.$$

Частным случаем этого соотношения является выражение для третьего центрального момента осредненного ССП ($K_q(0, 0) = \mu_{3q}$):

$$m_{3q} = \frac{2}{q^3}\iint\limits_D \left[(q-g)K(b,g) + bK(b-q,g-q) + (g-b)K(b,g-q)\right]db\,dg\,,$$

где область D задается условием: $D = \{(b, g):\ b \le g \le q,\ \ 0 \le b \le q\}$.

Для иллюстрации этого соотношения рассмотрена КФЗ неосредненного стационарного СП в виде

$$K(b,g) = m_3 \exp\left[-a\left(|\,b\,| + |\,g\,| + |\,b-g\,|\right)\right],$$

для которой получено соотношение ($x = aq$)

$$\frac{m_{3q}}{m_3} = \frac{3}{2x^3}\left[e^{-2x}(x+1) + x - 1\right], \tag{13}$$

связывающее центральные моменты третьего порядка осредненного и неосредненного ССП. Проанализированы тенденции изменения асимметрии распределения осредненного ССП при различных значениях параметра θ; зависимость (13) проиллюстрирована на рис. 3.

Соотношения вида (13) могут служить основой для рекомендаций по коррекции коэффициента асимметрии для ССП, прошедших операцию осреднения.

В пункте 4.5 в качестве иллюстрации теории на основании реальных экспериментальных данных рассмотрена тестовая задача о ССП электрической мощности $P(t) = I^2(t)$, когда ток $I(t)$ является нормальной ССФ. Для этой задачи найдены точное выражение КФЗ $K(a, b)$, которое определяется корреляционной функцией второго порядка $R(a)$ для СП $I(t)$, а также средним значением тока I_{sr}:

$$K(a, b) = 8\{R(a)R(b)R(b-a) +$$
$$+ I_{sr}^2\,[R(a)R(b) + R(a)R(b-a) + R(b)R(b-a)]\}. \tag{14}$$

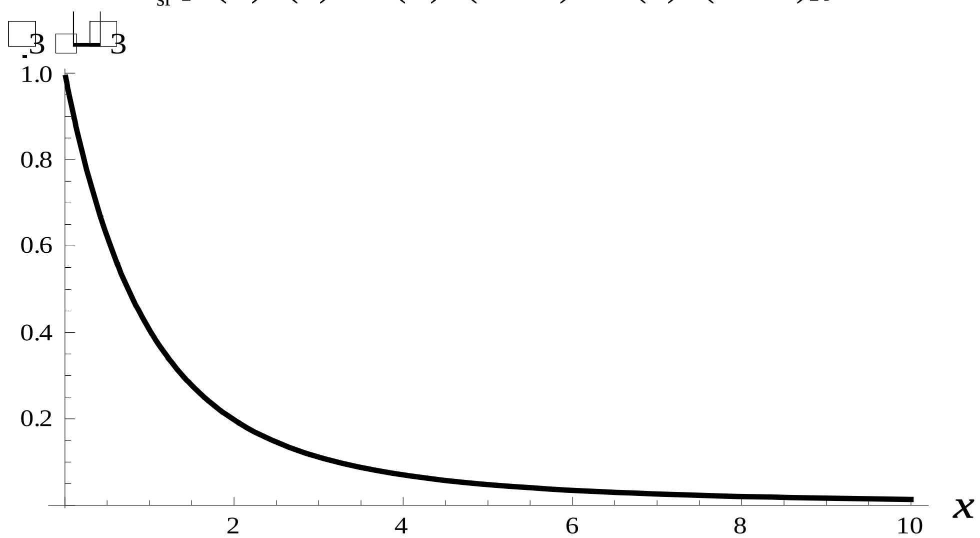

Рисунок 3 – График отношения третьих центральных моментов

В диссертации подробно анализируются симметрии функции $K(a, b)$ для различных стандартных видов функции $R(a)$ для конкретных экспериментальных данных.

Для примера на рис. 4 приведены КФЗ, соответствующие КФ2 вида (5), для параметров a = 0,85; R(0) = 0,7; I_{sr} = 1,9; b = 1,6 (левый рис.) и a = 1,6; R(0) = 1,5; I_{sr} = 5,76; b = 2,5 (правый рис.). Показано, что использование корреляционных функций третьего порядка дает возможность использовать более полную информацию о свойствах СП, что повышает точность расчетов характеристик случайных функций.

В пункте 4.6 диссертационной работы делается следующий шаг – обобщение полученных результатов на корреляционные функции порядка выше, чем третий. В работе поставлена и решена задача о восстановлении корреляционной функции $K(t_2, t_3, \dots, t_n)$ произвольного порядка n по ее известному образу $K_q(t_2, t_3, \dots, t_n)$ относительно преобразования осреднения (1):

$$K(t_2, t_3, ..., t_n) = (-1)^{n+1} \sum_{m_2=1}^{\infty} \sum_{m_3=1}^{\infty} \dots \sum_{m_n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} F_n(t_2 + m_2 q + kq, ..., t_n + m_n q + kq), \quad (15)$$

$$F_n(t_2, t_3, ..., t_n) = -q^n \sum_{k=2}^{n} \frac{\partial^n K_q(t_2, t_3, ..., t_n)}{\partial t_2 \partial t_3 ... \partial t_k^2 ... \partial t_n}.$$

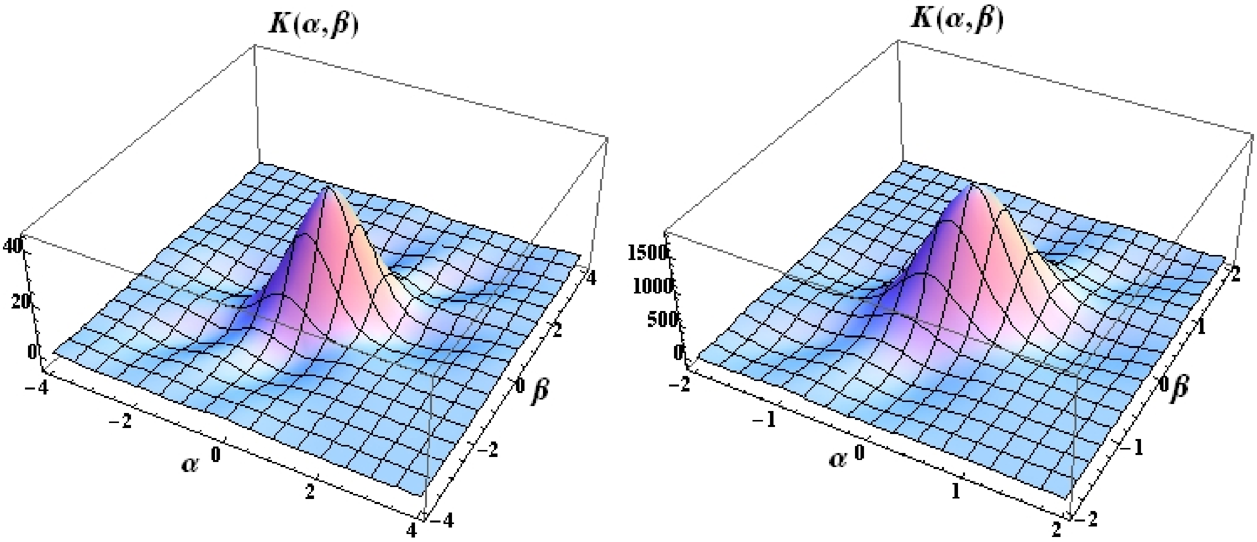

Рисунок 4 – Корреляционные функции третьего порядка

Соотношение (15) позволяет получить КФ n – го порядка неосредненного ССП $K(t_2, t_3, \dots, t_n)$, если известна соответствующая КФ n – го порядка $K_q(t_2, t_3, \dots, t_n)$ осредненного ССП.

В пятой главе введены понятия радиусов корреляции по отношению к корреляционной функции третьего порядка, которые могут быть использованы при рассмотрении трех сечений ССП. С этих позиций рассмотрены основные стандартные корреляционные функции и порождаемые ими КФЗ. В качестве конкретной задачи рассматривается задача о случайном процессе потребления электрической мощности $P(t) = I^2(t)$, когда сила тока $I(t)$ – ССП с нормальным распределением ординат. Все расчеты основывались на реальных данных потребления электроэнергии предприятиями ОАО «Оренбургнефть».

В пункте 5.1 показывается, что корреляционное приближение «не различает» случайные процессы $P(t)$ и $I(t)$, так как их КФ2 практически одни и те же, хотя отличие самих СП существенно: один из них является нормальным, а второй таковым не является.

В пункте 5.2 вводятся радиусы корреляции для КФЗ. Они определяются из условия уменьшения величины (нормированная КФЗ)

$$S(a, b) = K(a, b)/\sqrt{K^3(0)}$$

в e раз относительно ее максимума:

$$Sk = K(0, 0)/\sqrt{K^3(0)}.$$

В качестве радиуса корреляции можно принять расстояние от любой точки замкнутой линии $S(a, b) = Sk/e$ до начала координат. Среди этих расстояний есть наибольшее и наименьшее: T_{max} и T_{min}; они и определяют глобальные характеристики статистической зависимости для ординат трех сечений $\{P(t), P(t+a), P(t+b)\}$. Для этих сечений условие для проверки их некоррелированности выглядит так:

$$\sqrt{a^2+b^2} \geq T_{max}.$$

Пусть, например, КФ2 для нормального ССП $I(t)$ имеет вид:

$$R(t) = R(0)e^{-k|t|}\cos wt\ .$$

Рассматривая соответствующий ССП $P(t) = I^{2}(t)$, получим уравнение линии уровня, определяющей радиусы корреляции T_{max} и T_{min}:

$$R(0)\exp(-k(|a|+|b|+|b-a|))\cos wa\cos wb\cos w(b-a)+$$
$$+I_{sr}^2\exp(-k|a|)\cos wa\left(\exp(-k|b|)\cos wb+\exp(-k|b-a|)\cos w(b-a)\right)+$$
$$+I_{sr}^2\exp(-k(|b|+|b-a|))\cos wb\cos w(b-a)\Big] = [R(0)+3I_{sr}^2]/e.$$

Для этого случая на рис. 5 в качестве примера приведены линии уровня, построенные для двух наборов параметров:

$k = 0{,}58$; $R(0) = 0{,}6$; $I_{sr} = 1$, $w = 1$ и $k = 1{,}7$; $R(0) = 1{,}8$; $I_{ср} = 2{,}4$, $w = 2$

соответственно для левой и для правой частей рисунка. По данным линиям вычислялись радиусы корреляции, оказавшиеся равными: T_{max}= 1,050 и T_{min}= 0,562 (слева) и T_{max}= 0,452 и T_{min}= 0,235 (справа).

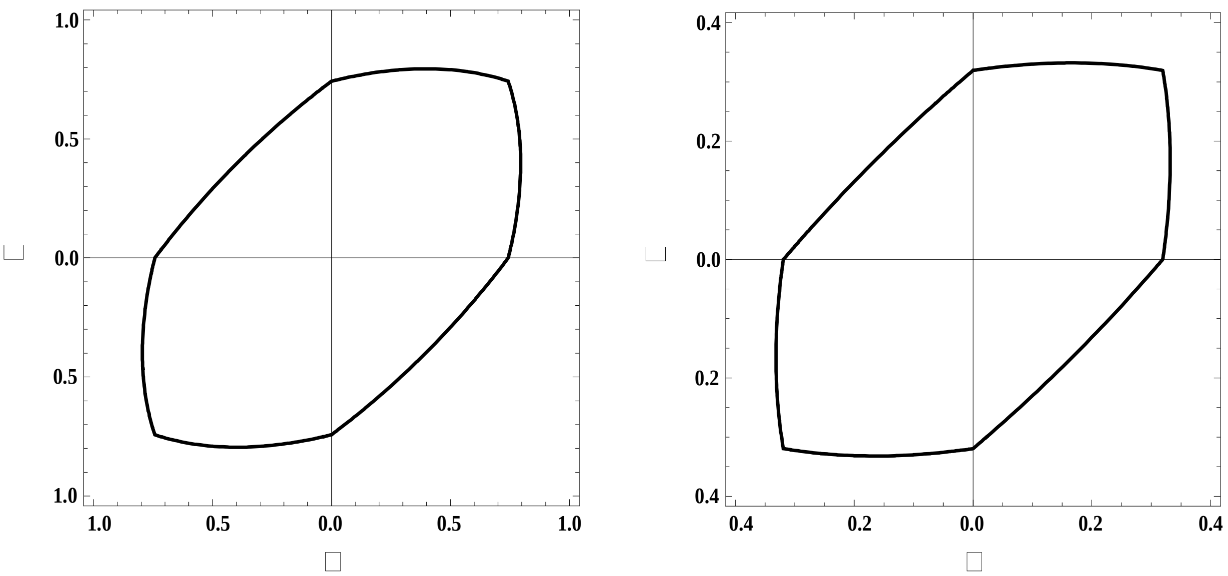

Рисунок 5 – Линии уровня КФ3

В пункте 5.3 при помощи корреляционных функций высших порядков построена и апробирована методика построения приближенных выражений для плотностей совместных распределений сечений ССП, причем в качестве примера использованы данные по электрической нагрузке $P(t)$ на предприятии ОАО «Оренбургнефть».

Для этой цели используется характеристическая функция системы сечений $E(u_1, u_2, \ldots, u_n, t_1, t_2, \ldots, t_n)$, имеющая вид ($j$ – мнимая единица):

$$E(u_1, u_2, \ldots, u_n, t_1, t_2, \ldots, t_n) = \mathbf{M}[\exp[j(u_1P(t_1) + u_2P(t_2) + \ldots + u_nP(t_n))]] =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(p_1, p_2, \ldots p_n, t_1, t_2, \ldots, t_n)\exp[j(p_1u_1+p_2u_2+\ldots+p_nu_n)]dp_1dp_2\,\mathbf{L}\,dp_n\ ,$$

связанная с совместной плотностью вероятностей $f\,(p_1, \ldots, p_n, t_1, \ldots, t_n)$ обратным преобразованием Фурье.

В пункте 5.4 с использованием описанной выше методики рассмотрен конкретный пример ССП реальной электрической нагрузки $P(t)$ предприятия ОАО «Оренбургнефть», для которого были найдены приближенные и точные законы распределения и проанализированы погрешности приближений.

Под расчетным максимумом (и минимумом) при статистическом методе расчета электрических нагрузок $P(t)$ обычно понимается не только величина расчетной нагрузки P_m, но и вероятность того, что эта величина будет превзойдена (не превзойдена). При этом предполагается, что закон распределения ординат ССФ $P(t)$ является нормальным.

Если $b > 0$ – кратность меры рассеяния, а D – дисперсия $P(t)$, то принимается, что максимальная (отвечающая знаку «+») и минимальная (отвечающая знаку «–») нагрузки P_m задаются в виде

$$P_m = P_{sr} \pm b\sqrt{D} = P_{sr} \pm bs,$$

причем

$$\mathbf{P}\left(P(t) > P_{sr} \pm bs\right) = \mathbf{P}\left(\frac{P(t) - P_{sr}}{s} > \pm b\right) = 1 - \Phi(\pm b) = Bep(\pm b) = g_n(b),$$

где $\Phi(x)$ – стандартная нормальная функция распределения. При этом график функции $g_n(b)$ называется интегральной кривой нормального распределения (упорядоченной диаграммой).

Допустим теперь, что ССП $P(t)$ не является нормальным. Очевидно, что тогда $K(0, 0) \neq 0$ и $K(0, 0, 0) \neq 0$. В этом случае, используя (16), можно получить нужное приближение (удерживая нужное число членов в (17)). Приближение $f_4(x)$ (были использованы корреляционные функции вплоть до четвертого порядка) для одномерной плотности вероятностей ординат нагрузки $P(t)$ в момент времени t равно

$$f_4(x) = \frac{1}{2p}\int_{-\infty}^{+\infty} E_{14}(u)\exp[-jxu]du,$$

где $E_{14}(u)$ – приближение характеристической функции первого порядка

$$E_{14}(u) = \exp\left[jP_{sr}u - \frac{1}{2}K(0)u^2 - \frac{j}{6}K(0,0)u^3 + \frac{1}{24}\left(K(0,0,0) - 3K^2(0)\right)u^4\right].$$

Вероятность превышения максимальной и занижения минимальной нагрузок для несимметричного распределения ССП $P(t)$ теперь равна:

$$\mathbf{P}(P(t) > P_{sr} \pm bs) = 1 - F_4(P_{sr} \pm bs) = Bep_4(\pm b) = g_4(b),$$

$$F_4(x) = \int_{-\infty}^{x} f_4(u)du.$$

Для рассматриваемого примера, когда $P(t) = I^2(t)$, существует точное решение для плотности вероятностей $f(x)$ ординат ССП:

$$f(x) = \frac{\operatorname{ch}\left(\dfrac{I_{sr}\sqrt{x}}{R(0)}\right)}{\sqrt{2p\,R(0)x}}\exp\left[-\frac{1}{2R(0)}\left(x + I_{sr}^2\right)\right],$$

где I_{sr} – среднее значение тока $I(t)$, $R(0)$ – дисперсия тока $I(t)$. Для точного решения получим расчетные нагрузки

$$\mathbf{P}(P(t) > P_{sr} \pm bs) = 1 - F(P_{sr} \pm bs) = g(b),$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du.$$

Используя конкретные экспериментальные данные для параметров распределения, были проанализированы погрешности, которые могут быть допущены при расчетах нагрузок для разных подходов. На рис. 6 слева показаны интегральные кривые, причем сплошной линией показана нормальная кривая $g_n(b)$, коротким пунктиром показана точная интегральная кривая $g(b)$, а длинный пунктир соответствует приближенной интегральной кривой $g_4(b)$. Задавая различные значения b, можно по графику найти вероятности превышения или непревышение соответствующей величины нагрузки.

Справа на рис. 6 приведены графики точной $f(x)$ плотности вероятностей ординат нагрузки $P(t)$ (сплошная линия) и приближение $f_4(x)$ для плотности (пунктирная линия). Начиная примерно с $x = P_{sr}$ приближение $f_4(x)$ достаточно хорошо аппроксимирует точную плотность вероятности $f(x)$.

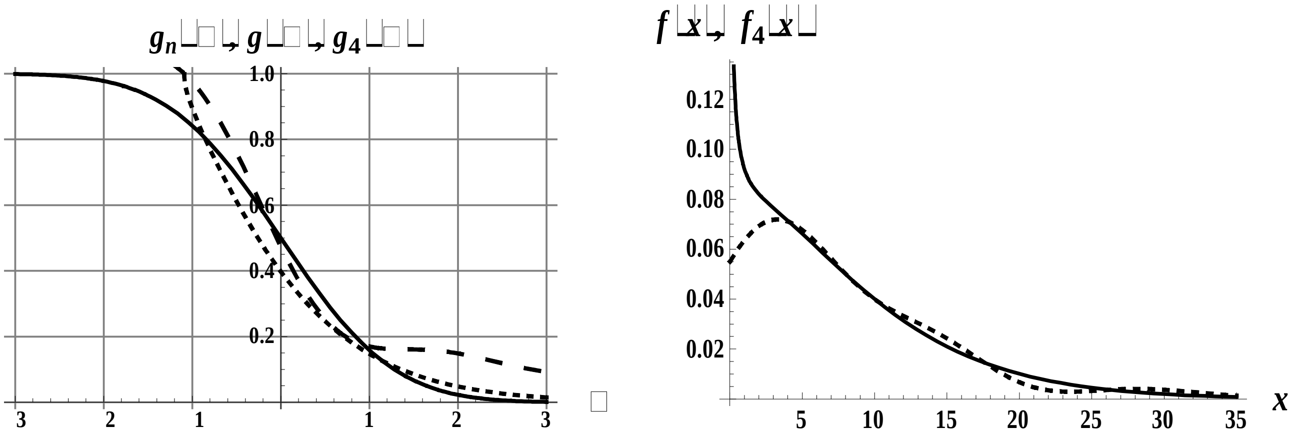

Рисунок 6 – Пример аппроксимации интегральной кривой (слева) и одномерной плотности вероятности (справа)

Легко видеть, что использование нормальной кривой $g_n(b)$ для расчетов нагрузок (при данных значений параметров) оправдано при $b > -1$ и дает значительные ошибки при других значениях b.

Если взять, например, $b = -1$, то из рис. 6 легко видеть, что для нормального распределения (сплошная линия) вероятность $g_4(b)$ равна, примерно, 0,85; в то время как точное значение этой вероятности (короткий пунктир) равно 1. Также ясно, что приближенная интегральная кривая $g_4(b)$ при конкретных значениях $b \in [1, 3]$ будет завышать вероятность события $\mathbf{P}(P(t) > P_{cp} + bs)$, причем абсолютная погрешность ошибки может достигать величины 0,15.

В шестой главе описывается программный комплекс «KORRFUN», созданный на основе результатов, полученных автором диссертации. Программный комплекс предназначен для обработки экспериментальных данных, которые представляют собой выборку значений некоторого ССП, позволяет получать и корректировать, на основе имеющейся выборки, оценки для корреляционных функций второго и третьего порядков, а также корректировать свойства ССП, прошедшего преобразование осреднения.

В пункте 6.1 содержится подробное описание интерфейса программы, назначения разных пунктов меню.

В пункте 6.2 описывается та часть программного комплекса, которая ответственна за получение оценок КФ2 на основе выборочного материала.

В пункте 6.3 объясняется работа программного комплекса при аппроксимации

КФ2 тем или иным стандартным выражением, с использованием полученных ранее оценок для КФ2.

В пункте 6.4 описывается вычисление и аппроксимация КФ3 на основе стандартных выражений для КФ2 и с учетом оценок, полученных из выборки статистического материала. В качестве примера на рис. 7 показана одна конкретная реализация КФ3.

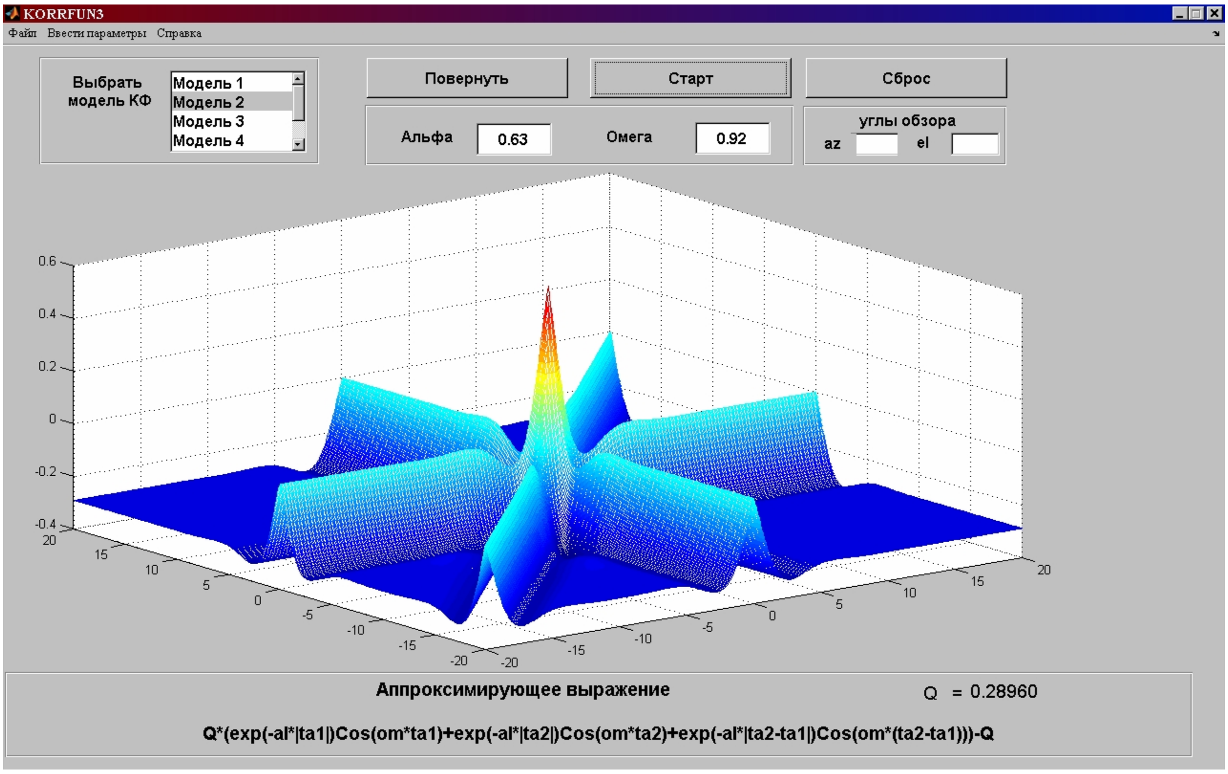

Рисунок 7 – Корреляционная функция третьего порядка

В пункте 6.5 описывается работа программного комплекса, выполняющего учет искажений корреляционной функции второго порядка в зависимости от интервала осреднения. Корректировка данных происходит с учетом конкретной математической модели корреляционной функции.

В заключении перечислены основные результаты, полученные в диссертационной работе:

1. Разработана математическая модель механизма искажения корреляционной функции ССП, включающая в себя соотношение между известной корреляционной функцией $K_q\ (t)$ осредненного ССП и неизвестной корреляционной функции неосредненного (реального) ССП $K(t)$. На основе данной модели рассмотрены типовые корреляционные функции, для которых получены расчетные формулы оценки погрешности осреднения в зависимости от параметра осреднения q. Выполнено детальное исследование области допустимых значений параметра осреднения для различных типов КФ2 и указаны области, в которых решение обратной задачи имеет вероятностный смысл.

2. В рамках математической модели получены общие формулы для нахождения корреляционных функций порядка n (КФn) и исследованы их свойства. Показано, что множество корреляционных функций высших порядков связано иерархическими соотношениями, позволяющими последовательно из экспериментов находить, начиная с КФ2, корреляционные функции любого порядка. В рамках уточнения корреляционного приближения детально рассмотрены корреляционные функции

третьего порядка для стохастических задач с негауссовыми случайными процессами. Проанализированы свойства КФЗ, показана их связь с КФ2, упрощающая получение оценок для КФЗ на практике.

3. Разработана методика восстановления корреляционной функции произвольного порядка для ССП, прошедшего операцию осреднения. Найдены соотношения, позволяющие получать КФn неосредненного процесса по известной КФn процесса, прошедшего операцию осреднения. Детально решена и исследована задача о влиянии преобразовании осреднения на КФЗ. Получено соотношение, связывающее КФЗ неосредненного сигнала и КФЗ стационарного случайного процесса, прошедшего операцию осреднения с параметром осреднения q. Проанализировано влияние операции осреднения на асимметрично распределенные случайные процессы в зависимости от параметра q и получены расчетные формулы для корректировки коэффициента асимметрии ССП после его осреднения.

4. Введены понятия радиусов корреляции по отношению к корреляционной функции третьего порядка, которые использованы при рассмотрении трех и более сечений ССП. С этих позиций рассмотрены основные стандартные корреляционные функции, используемые в приложениях; в частности, в задачах электроснабжения промышленных предприятий. Полученные результаты использованы в реальных практических ситуациях.

5. При помощи корреляционных функций высших порядков (в конкретных примерах брались корреляционные функции второго, третьего и четвертого порядков) указан способ построения приближенных выражений для плотностей совместных распределений на примере одномерного распределения сечений электрической нагрузки $P(t)$. Для численной реализации методики рассмотрены конкретные задачи, возникающие в электроснабжении промышленных предприятий, и показано преимущество новой методики по сравнению с классическим подходом, используемым в настоящее время для расчета систем электроснабжения. Найдены приближенные и точные решения для максимума электрической нагрузки и проанализированы погрешности приближений.

6. Разработан программный комплекс «KORRFUN», реализованный в среде MATLAB, предназначенный для обработки данных натурных экспериментов, а также для анализа корреляционных моментов высших порядков и корректировки данных о сигналах, прошедших операцию осреднения. На основе реальных экспериментальных данных о работе предприятий ОАО «Оренбургнефть», потребляющих электрическую нагрузку, проведено тестирование программного комплекса, показавшее его эффективность при выполнении указанных задач.

Список основных публикаций

Статьи в изданиях из перечня ВАК

1. *Евдокимов М. А., Кузнецов В. А., Кузнецов В. В.* Математические аспекты преобразования случайных процессов. // Вестник СамГТУ. Серия «Технические науки» № 1 (21) – 2008, С. 69 – 73.
2. *Кузнецов В. В.* Использование моментов третьего порядка в расчетах электрических нагрузок. // Вестник СамГТУ. Серия «Технические науки» № 2 (24) – 2009, С. 166 – 171.

3. *Евдокимов М. А., Кузнецов В. А., Кузнецов В. В.* Корреляционные функции третьего порядка и их приложения. // Вестник СамГТУ. № 2 (26) – 2010, С. 37 – 43.

Статьи в других научных изданиях

4. *Кузнецов В. А., Кузнецов В. В., Степанов В. П.* Статистический анализ графиков электрической нагрузки района добычи нефти. // Оптимизация режимов работы электротехнических систем. Межвузовский сборник научных трудов. / – Красноярск: СФУ, 2008, С. 171 – 180.
5. *Кузнецов В. В.* Об одном линейном преобразовании несимметричных распределений вероятностей. // Моделирование и оптимизация динамических систем и систем с распределенными параметрами. – Самара, СамГТУ, 2008. С. 61 – 66.
6. *Кузнецов В. А., Кузнецов В. В.* Об осреднении стационарных случайных функций. // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды 6-й Всероссийской конференции с международным участием. Ч. 2: Моделирование и оптимизация динамических систем и систем с распределенными параметрами. – Самара: СамГТУ, 2009. С. 80 – 85.
7. *Кузнецов В. В.* О нахождении корреляционных функций высших порядков.//Актуальные проблемы современной науки. Труды 4 – го Международного форума (9 – й Международной конференции) 20 – 23 ноября 2008 г. Естественные науки. Части 1 – 3. Математика. Математическое моделирование. Механика. Самара: Изд – во СамГТУ, 2008. С. 99 – 104.
8. *Кузнецов В. А., Кузнецов В. В.* Некоторые вопросы применения корреляционных функций высших порядков. // Актуальные проблемы современной науки. Части 1,2. Математика и математическое моделирование. Труды 3-го Международного форума (8-й Международной конференции), 20 – 23 ноября 2007 г. Самара 2007, изд-во СамГТУ, 2007, С. 36 – 39.
9. *Кузнецов В. В.* Исследование одной модели «скользящего среднего». // Современные проблемы гуманитарных и естественных наук. Материалы второй международной научно-практической конференции. 15 – 25 января 2010 г., т. II. М:. Литера, 2010. – 16 – 18 с.
10. *Кузнецов В. В., Радченко В. П.* Нахождение высших моментов случайных функций // Материалы научно-практической конференции «Фундаментальные и прикладные исследования в системе образования», Тамбов, 2010, с. 123 – 128.
11. *Кузнецов В. В.* Корреляционные функции высших порядков в прикладных задачах. // Материалы X Международной научно-технической конференции «Информатика: проблемы, методологии, технологии», т 1, Воронеж: ВГУ, – 2010 г., с. 403 – 406.
12. *Кузнецов В. В.* Скользящее среднее случайных функций с различными параметрами осреднения // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Часть 4. Самара: СамГТУ, 2010, с 107 – 111.

Личный вклад автора. В работах [1], [3], [4] ,[6], [8], [10] написанных в соавторстве, соискателю принадлежат: разработка математических моделей, расчетная часть и выводы.

Разрешено к печати диссертационным советом Д 212.217.03.
Протокол № 6 от 25 мая 2010 г.

Заказ № 526. Формат 60×84 1/16. Бумага тип. №1.
Печать офсетная. Уч.-изд. л. 1,0. Тираж 100 экз.

Самарский государственный технический университет.
Типография СамГТУ.
443100, г. Самара, Молодогвардейская ул. 244, Главный корпус