

На правах рукописи

Романюк Мария Анатольевна

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ
НЕЛИНЕЙНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ
НА ОСНОВЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Специальность 05.13.18 – «Математическое моделирование,
численные методы и комплексы
программ»

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Самара – 2014

Работа выполнена на кафедре «Прикладная математика и информатика» Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Самарский государственный технический университет»

Научный руководитель: Зотеев Владимир Евгеньевич
доктор технических наук, доцент

Официальные оппоненты: Леонтьев Виктор Леонтьевич,
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГБОУ ВПО «Ульяновский государственный университет» (г. Ульяновск), профессор кафедры «Информационная безопасность и теория управления»

Кораблин Михаил Александрович,
доктор технических наук, профессор, ФГБОУ ВПО «Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики» (г. Самара), заведующий кафедрой «Информационные системы и технологии»

Ведущая организация: ФГАОУ ВО «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева (Национальный исследовательский университет)» (г. Самара)

Защита диссертации состоится 18 декабря 2014 года в 12 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.217.03 ФГБОУ ВПО «Самарский государственный технический университет» по адресу: г. Самара, ул. Галактионовская, 141, корп. №6, ауд. №33.

Отзывы по данной работе в двух экземплярах, заверенные печатью, просим направлять по адресу: Россия, 443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244, Главный корпус, на имя ученого секретаря диссертационного совета Д 212.217.03; тел. (846) 337-04-43, e-mail: radch@samgtu.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Самарского государственного технического университета по адресу: 443100, г. Самара, ул. Первомайская, 18, корп. №1 и на сайте www.samgtu.ru.

Автореферат разослан «__» _____ 2014 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 212.217.03

Зотеев В.Е.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Важнейшей проблемой математического моделирования является проблема параметрической идентификации нелинейных систем различной физической природы на основе результатов наблюдений, полученных в ходе научно-технического, промышленного экспериментов или в процессе естественного функционирования системы. Достоверность и оперативность оценок параметров математических моделей существенным образом влияет на эффективность применения этих моделей в научных исследованиях, производственной деятельности, в социальной и экономической сферах, а также при решении задач, связанных с управлением, прогнозированием и т.п.

При использовании математического описания различного рода динамических, эволюционных процессов в форме обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений математической физики в частных производных, как правило, требуется построение их точных или приближенных решений, представляющих собой нелинейные функциональные зависимости, параметры которых подлежат определению по результатам наблюдений. Например, в машиностроении одной из основных проблем является проблема параметрической идентификации нелинейных диссипативных механических систем в процессе их эксплуатации или прочностных промышленных испытаний. Другим примером из механики может служить математическое моделирование напряженно-деформированного состояния в упрочненном слое элементов конструкций после процедуры поверхностного пластического деформирования в условиях ползучести. В этом случае актуальна задача оценки параметров кривой ползучести разупрочняющегося материала на всех трех стадиях деформации ползучести.

Примерами из других областей научных знаний могут служить математические модели в форме логистических функций. Наиболее широко логистические функции используются при описании различных трендов в экономике: изменения спроса и продаж, емкости рынков, цен на товары и т.п. Таким образом, проблема параметрической идентификации нелинейных математических моделей является актуальной для широкого круга задач различной физической природы.

Анализ известных методов параметрической идентификации нелинейных систем по результатам наблюдений позволяет выделить среди них три основные группы. Во-первых, это методы определения параметров нелинейных зависимостей, в которых принципиально отсутствует статистическая обработка результатов эксперимента, а в основе вычисления параметров лежат соотношения и алгоритмы, использующие минимально необходимое число точек эксперимента. Описание таких методов можно найти в работах Я.Г. Пановко, Г.С. Писаренко, Ю.П. Самарина, В.П. Радченко и др. Вторую группу образуют методы параметрической идентификации, в которых используются стохастические модели временных рядов, в том числе современные методы цифрового спектрального и корреляционного анализа. Эти методы достаточно полно описаны в работах таких ученых как Т.В. Андерсен, Дж. Е.П. Бокс, Д.Г. Ватс, М. Дж. Кендалл, С.Л. Марпл-мл., Р.Л. Кашьяп, А.Р. Рао, П. Эйкхофф, Э. Хеннан, Д. Химмельблау и др. Однако, несмотря на высокую эф-

эффективность и широкое распространение, область применения этих методов, как правило, функционально ограничена классом линейных систем и исключает задачи непосредственного оценивания параметров нелинейных математических моделей.

Наиболее близкими к решению задач, принципиально не допускающих линеаризацию математической модели, являются методы нелинейного среднеквадратичного оценивания. В этой группе методов также можно выделить три различных подхода. Первый подход – непосредственный поиск минимума функции нескольких переменных – реализуется градиентным методом, методом сопряженных градиентов, методом Ньютона и др. Более эффективными являются методы, минимизирующие сумму квадратов отклонений с использованием итерационных численных методов решения системы нелинейных уравнений: метод Ньютона-Гаусса, метод Хартли, метод Левенберга-Маркуардта и др. Также можно выделить методы, в основе которых лежат преобразования, линеаризующие нелинейную зависимость относительно ее параметров (например, применение логарифмирования). Такой подход позволяет эффективно использовать методы линейного регрессионного анализа в матричной форме. Основными недостатками известных методов нелинейного оценивания является требование невысокой степени нелинейности, проблема с выбором начального приближения в итерационной процедуре, медленная сходимость итераций, а в ряде случаев – её отсутствие.

Принципиально иной подход к решению задачи нелинейного оценивания описан в работах В.Е. Зотеева. В основе этого подхода также лежит линеаризация математической модели, но не относительно её параметров, а относительно коэффициентов линейно-параметрической дискретной модели, которая в форме разностного уравнения описывает последовательность значений нелинейной зависимости. Известные соотношения между коэффициентами разностного уравнения и параметрами нелинейной математической модели позволяют свести задачу определения параметров нелинейной зависимости к итерационной процедуре среднеквадратичного оценивания коэффициентов линейной регрессионной модели. При этом практически решается проблема выбора начального приближения при достаточно высокой скорости сходимости итераций. К достоинствам такого подхода можно отнести универсальность алгоритма среднеквадратичного оценивания для нелинейных математических моделей различного вида. В каждом отдельном случае необходимо лишь построить соответствующее разностное уравнение и описать матрицу преобразования вектора остатков для обобщенной регрессионной модели.

Целью диссертационной работы является построение, исследование и систематизация новых линейно-параметрических дискретных моделей в форме разностных уравнений, разработка на их основе новых численных методов и программных средств для определения параметров нелинейных математических моделей объектов, процессов и явлений различной физической природы.

Для достижения поставленной цели решаются следующие взаимосвязанные **научные задачи**:

– построение линейно-параметрических дискретных моделей, описывающих в форме разностных уравнений результаты наблюдений, для широкого класса нелинейных математических моделей;

– разработка численного метода определения параметров нелинейных математических моделей на основе разностных уравнений, обеспечивающего высокую помехозащищенность оценок за счет эффективного использования статистических методов обработки экспериментальных данных;

– численно-аналитические исследования помехозащищенности, сходимости и устойчивости численного метода определения параметров нелинейных математических моделей на основе разностных уравнений;

– разработка программного обеспечения, реализующего помехозащищенные алгоритмы вычислений параметров нелинейных математических моделей на основе разностных уравнений.

Объектом исследования являются различные по физической природе объекты, системы или процессы, при параметрической идентификации которых используются нелинейные математические модели, принципиально не допускающие линеаризации.

Предметом исследования являются линейно-параметрические дискретные модели, описывающие в форме разностных уравнений результаты наблюдений, а также численный метод определения параметров нелинейных математических моделей на основе среднеквадратичного оценивания коэффициентов разностных уравнений.

Научная новизна работы заключается в оригинальности подхода к решению задачи нелинейного среднеквадратичного оценивания. В работе получены следующие новые научные результаты:

– построены и систематизированы новые математические модели в форме разностных уравнений для различных типов одномерных (унитарных, логистических, дробно-рациональных, содержащих гармоническую компоненту и в виде конечных сумм) и двумерных нелинейных функциональных зависимостей, применение которых позволяет повысить точность результатов вычислений;

– разработан новый численный метод определения параметров нелинейных функциональных зависимостей, в основе которого лежит итерационная процедура среднеквадратичного оценивания коэффициентов разностного уравнения, отличающийся от существующих методов использованием матрицы линейного преобразования вектора остатков, что устраняет смещение среднеквадратичных оценок и тем самым повышает их точность;

– разработаны новые численные методы определения параметров типовых ударных воздействий по результатам наблюдений их амплитудно-частотной характеристики и логистических функциональных зависимостей, описывающих эволюционные биологические или экономические процессы, отличающиеся от известных методов применением разностных уравнений и позволяющие минимизировать среднеквадратичное отклонение построенной математической модели от экспериментальных данных;

– разработан и апробирован новый численный метод определения параметров нелинейной аппроксимационной зависимости для кривых ползучести поливинилхлоридного пластика по совокупности нескольких образцов материала, отли-

чающийся от существующих методов применением среднеквадратичного оценивания коэффициентов разностного уравнения, описывающего результаты эксперимента, что позволяет повысить точность результатов вычислений;

– разработано программное обеспечение, реализующее разработанные помехозащищенные алгоритмы вычислений параметров нелинейных функциональных зависимостей, которое может быть использовано при обработке результатов экспериментов и промышленных испытаний систем различной физической природы.

Научная и практическая значимость работы. Построенные и систематизированные линейно-параметрические дискретные модели, описывающие в форме разностных уравнений представленное в диссертационной работе многообразие нелинейных функциональных зависимостей, позволяют свести задачу нелинейного оценивания к итерационной процедуре уточнения решений задачи линейного регрессионного анализа. Предлагаемый численный метод определения параметров нелинейной математической модели, в основе которого лежит итерационная процедура среднеквадратичного оценивания коэффициентов разностного уравнения, позволяет практически обеспечить максимальную адекватность модели данным эксперимента, и, тем самым, существенно повысить точность вычисления оценок. Разработанный пакет прикладных программ, реализующий в среде визуального и объектно-ориентированного языка программирования под управлением операционной системы *Windows* помехозащищенные алгоритмы вычислений параметров нелинейных функциональных зависимостей, может быть использован при обработке результатов научно-технических экспериментов и промышленных испытаний систем различной физической природы.

Основные положения, выносимые на защиту:

– линейно-параметрические дискретные модели, описывающие в форме разностных уравнений результаты наблюдений различного рода нелинейных динамических и эволюционных процессов;

– новые структурные соотношения во временной области между результатами наблюдений, коэффициентами разностного уравнения и параметрами нелинейной математической модели;

– численный метод среднеквадратичного оценивания параметров нелинейных функциональных зависимостей на основе разностных уравнений;

– новые результаты численно-аналитических исследований эффективности разработанного численного метода оценивания параметров нелинейных математических моделей на основе разностных уравнений;

– новый численный метод определения параметров типовых ударных воздействий по результатам наблюдений их амплитудно-частотной характеристики;

– новый численный метод определения параметров логистических функциональных зависимостей на основе разностных уравнений;

– новый численный метод определения параметров нелинейной аппроксимационной зависимости для кривых ползучести поливинилхлоридного пластиката по совокупности нескольких образцов материала.

Обоснованность выносимых на защиту научных положений, выводов и рекомендаций, а также достоверность полученных результатов исследований обеспечивается корректным использованием применяемого математического аппарата и вводимых допущений и гипотез; сравнением данных численного расчета с известными аналитическими методами для подтверждения точности результатов вычислений; численно-аналитическими исследованиями на основе имитационного моделирования устойчивости вычислений и анализа помехозащищенности моделей; численно-аналитическими исследованиями адекватности построенных математических моделей экспериментальным данным.

Связь диссертационной работы с планами научных исследований.

Полученные в работе теоретические положения и практические результаты использованы:

– при выполнении проекта Министерства образования и науки РФ (проект РНП 2.1.1/13944): «Разработка методов решения краевых задач, расчетно-информационная база данных и программный комплекс для оценки релаксации остаточных напряжений при ползучести и сопротивления усталости упрочненных элементов конструкций с концентраторами напряжений» в рамках аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009 – 2011 гг.)»;

– в учебном процессе ФГБОУ ВПО «Самарский государственный технический университет» в лекционных курсах по дисциплинам: «Численные методы», «Математическое моделирование в машиностроении», «Математические методы обработки экспериментальных данных», «Математические методы прогнозирования», а также в лабораторных, курсовых и выпускных квалификационных работах;

– в опытно-конструкторской работе, выполненной ООО «Специальное Конструкторско-Технологическое Бюро «Пластик» (имеется акт внедрения).

Апробация работы.

Результаты исследований по теме диссертационной работы докладывались на Третьей Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи» (г. Самара, 2006 г.); Втором международном форуме «Актуальные проблемы современной науки» (г. Самара, 2006 г.); Четвертой Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (г. Самара, 2007 г.); Шестнадцатой Всероссийской конференции молодых ученых (г. Пермь, 2007 г.); Третьем Международном форуме «Актуальные проблемы современной науки» (г. Самара, 2007 г.); Международной молодежной научной конференции «XXXIV Гагаринские чтения» (г. Москва, 2008 г.); Пятой Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (г. Самара, 2008 г.); Четвертом международном форуме «Актуальные проблемы современной науки» (г. Самара, 2008 г.); Седьмой международной конференции «Математическое моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов» (г. Ульяновск, 2009 г.); Четвертой Всероссийской научно-технической конференции «Ресурс и диагностика материалов и конструкций» (г. Екатеринбург, 2009 г.); Шестой Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моде-

лирование и краевые задачи» (г. Самара, 2009 г.); Всероссийской научно-практической конференции молодых ученых «Современные проблемы математики и ее прикладные аспекты» (г. Пермь, 2010 г.); Международной молодежной научной конференции по естественнонаучным и техническим дисциплинам «Научному прогрессу – творчество молодых» (г. Йошкар-Ола, 2010 г.); Седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (г. Самара, 2010 г.); Тринадцатой международной научной конференции им. академика М. Кравчука (г. Киев, 2010 г.); Международной научно-технической конференции «Информационные, измерительные и управляющие системы» (г. Самара, 2010 г.); Пятом Международном форуме «Актуальные проблемы современной науки» (г. Самара, 2010 г.); Восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (г. Самара, 2011 г.); Девятой Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (г. Самара, 2013 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 29 печатных работ, из них 9 в изданиях из перечня ВАК, получено свидетельство о регистрации программы для ЭВМ.

Личный вклад автора. Работы [16, 22, 23, 27, 28] выполнены самостоятельно, в работах [1–6, 10–15, 17, 19–21, 24–26, 29] диссертанту принадлежит совместная постановка задачи и разработка методов решений, ему лично принадлежит алгоритмизация, реализация методов в виде программного продукта и анализ результатов. В остальных работах [7, 8, 9, 18], опубликованных в соавторстве, автору в равной степени принадлежат как постановка задачи, так и результаты выполненных исследований.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, пяти приложений и списка использованных источников, содержащего 146 наименований. Основная часть диссертационной работы содержит 257 страниц машинописного текста, включающего 122 рисунка и 24 таблицы.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, формулируются цель и основные задачи исследуемой работы, обозначена научная новизна и практическая значимость полученных результатов, представлены основные положения, выносимые на защиту.

В первой главе исследуется проблема повышения точности и достоверности оценок в задачах определения параметров нелинейных математических моделей и перспективы ее решения на основе линейно-параметрических дискретных моделей. Проводятся аналитический обзор и анализ эффективности известных методов идентификации нелинейных систем и на основе результатов анализа формулируются научная проблема, цель и задачи диссертации. Рассматриваются перспективы решения задачи повышения адекватности и точности вычисления параметров нелинейных математических моделей на основе линейно-параметрических дискретных моделей. Выделяются основные этапы в разработке новых методов определения па-

раметров нелинейных математических моделей на основе разностных уравнений. Описываются основные типы нелинейных функциональных зависимостей, широко применяемых при математическом моделировании динамических и эволюционных процессов различной физической природы.

Вторая глава посвящена построению линейно-параметрических дискретных моделей (ЛПДМ), описывающих в форме разностных уравнений последовательности дискретных значений различных типов одномерных и двумерных нелинейных функциональных зависимостей.

В п.2.1 рассматриваются два основных подхода к построению разностных уравнений для различных классов нелинейных функциональных зависимостей: унитарных, логистических, дробно-рациональных, в том числе содержащих гармоническую составляющую. В основе первого подхода лежат обобщенные многочлены $\Phi(t)$ по системе линейно независимых функций $\varphi_i(t)$, обладающие свойством

$$\Phi(t + \tau) = \sum_{i=1}^n a_i(\tau) \varphi_i(t). \text{ Применение таких многочленов позволяет свести задачу}$$

построения ЛПДМ к простой задаче линейной алгебры: решению систем линейных алгебраических уравнений. Приведены различные формулировки и способы решения такой задачи в матричной форме. В основе второго подхода к построению разностных уравнений для нелинейных функциональных зависимостей вида

$$y(t) = \frac{P_m(t)e^{\alpha t}}{Q_n(t)} \cos(\omega t + \psi) \text{ лежит применение } z\text{-преобразования. Описан алгоритм}$$

$$\text{построения ЛПДМ в виде } \sum_{r=1}^R \lambda_r f_r(k, y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-N}) = f_{R+1}(k, y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-N}), \text{ ко-}$$

торый включает в себя переход от нелинейных по параметрам функций к их дискретным аналогам, применение z -преобразования, ряд эквивалентных преобразований в пространстве изображений и последующий возврат в пространство оригиналов.

В п.2.2 описано построение и систематизация новых линейно-параметрических дискретных моделей в форме разностных уравнений для основных классов нелинейных функциональных зависимостей. Получены соотношения, связывающие коэффициенты построенных разностных уравнений с параметрами семнадцати нелинейных функциональных зависимостей, что позволяет свести задачу оценивания параметров нелинейных математических моделей к задаче линейного регрессионного анализа.

В п.2.3 описано построение разностной схемы для двумерного эволюционного процесса, математическая модель которого может быть представлена в виде произведения двух мультипликативных компонент, каждая из которых связана только с одной из двух независимых переменных: $z(t, x) = y(t)u(x)$, где $y(t) = c_1(1 - e^{-\alpha_1 t}) + c_2(1 - e^{-\alpha_2 t})$, $u(x) = e^{\beta x}$, $c_1, c_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta \in R$. Математические модели такого вида применяются при описании процессов деформации ползучести материала при различном напряжении. Получены соотношения, связывающие ко-

эффиценты разностной схемы с параметрами двумерного процесса указанного вида.

Третья глава посвящена разработке и исследованию численного метода определения параметров нелинейных математических моделей, в основе которого лежат линейно-параметрические дискретные модели, описывающие в форме разностных уравнений результаты эксперимента.

В п.3.1 описывается формирование стохастических разностных уравнений, описывающих результаты наблюдений мгновенных значений динамических или эволюционных процессов. Эти уравнения строятся на основе линейно-параметрических дискретных моделей с учетом разброса экспериментальных данных в результатах наблюдений $y_k = \hat{y}_k + \varepsilon_k$, где \hat{y}_k – дискретные значения нелинейной математической модели, описывающей наблюдаемый процесс, ε_k – разброс экспериментальных данных относительно принятой модели (остатки).

В общем случае линейно-параметрические дискретные модели в форме стохастических разностных уравнений можно представить в виде:

$$\begin{cases} b_i = \lambda_1 f_{i1} + \lambda_2 f_{i2} + \dots + \lambda_r f_{ir} + \eta_i, & i = 1, 2, 3, \dots; \\ y_0 = \lambda_{r+1} + \varepsilon_0; & y_1 = \lambda_{r+2} + \varepsilon_1; \dots; & y_{l-2} = \lambda_{r+l-1} + \varepsilon_{l-2}, \end{cases} \quad (1)$$

где переменные $f_{ij} = f_{ij}(y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-l+1})$, $j = 1, 2, \dots, r$; $b_i = b_i(y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-l+1})$; l – число последовательных отсчетов $y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-l+1}$, используемых в разностном уравнении; $k = l-1, l, \dots, N-1$; N – объем выборки дискретных значений y_k ; η_k – эквивалентное случайное возмущение:

$$\eta_i = \sum_{s=1}^l d_{is} \varepsilon_{k-s+1} + o(\varepsilon_k), \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

где $d_{is} = d_{is}(y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-l+1})$: $d_{is} = \frac{\partial b_i}{\partial y_{k-s+1}} - \sum_{j=1}^r \lambda_j \frac{\partial f_{ij}}{\partial y_{k-s+1}}$, $s = 1, 2, \dots, l$.

При оценивании коэффициентов разностных уравнений используется обобщенная регрессионная модель, которая строится на основе уравнений (1):

$$\begin{cases} b = F\lambda + \eta, \\ \eta = P_\lambda \varepsilon, \end{cases} \quad (2)$$

где $F = \begin{bmatrix} 0 & E \\ F_1 & 0 \end{bmatrix}$ – блочная матрица размера $N \times n$, состоящая из следующих матриц:

E – единичная матрица размера $(l-1) \times (l-1)$; F_1 – матрица размера $(N-l+1) \times r$, элементы которой формируются на основе соответствующей линейно-параметрической дискретной модели; $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \dots, \lambda_{r+l-1})^T$ – n -мерный вектор коэффициентов, подлежащий оценке; $b = (y_0, y_1, \dots, y_{l-2} | b_1^T)^T$ – N -мерный вектор свободных членов обобщенной регрессионной модели, первые $l-1$ элементов которого совпадают с первыми $l-1$ членами выборки результатов наблюдений, а следующие $(N-l+1)$ элементов, образующие вектор b_1 , вычисляются

на основе соответствующей линейно-параметрической дискретной модели; $\eta = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{l-2} | \eta_1^T)^T$ – N -мерный вектор невязки (эквивалентного случайного возмущения) в обобщенной регрессионной модели, первые $l-1$ элементов которого совпадают с первыми $l-1$ элементами вектора остатков $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)^T$, а остальные элементы вектора η , составляют вектор η_1 размера $(N-l+1)$;

$P_\lambda = \begin{bmatrix} E & O \\ & P_1 \end{bmatrix}$ – блочная матрица размера $N \times N$ линейного преобразования вектора остатков $\varepsilon = y - \hat{y}$ в результатах наблюдений, составными частями которой являются: E – единичная матрица размера $(l-1) \times (l-1)$; P_1 – ленточная, l -диагональная матрица размера $(N-l+1) \times N$, O – нулевая матрица размера $(l-1) \times (N-l+1)$.

Для каждой из семнадцати исследуемых нелинейных функциональных зависимостей построены стохастические разностные уравнения и представлены формулы, описывающие элементы матрицы F и вектора b для соответствующей обобщенной регрессионной модели (2), а также элементы матрицы P_λ линейного преобразования вектора остатков в результатах наблюдений.

В п.3.2 описываются и анализируются основные этапы численного метода параметрической идентификации нелинейных математических моделей на основе разностных уравнений, а именно: формирование выборки результатов наблюдений, выбор линейно-параметрической дискретной модели, построение стохастических разностных уравнений и соответствующей обобщенной регрессионной модели, среднеквадратичное оценивание коэффициентов стохастического разностного уравнения, вычисление оценок параметров нелинейных функциональных зависимостей по найденным коэффициентам стохастического разностного уравнения, оценка погрешности результатов вычислений. Для каждой из семнадцати исследуемых нелинейных функциональных зависимостей получены формулы для вычисления оценок неизвестных параметров по среднеквадратичным оценкам коэффициентов соответствующих разностных уравнений. Описана методика оценки погрешности вычисления параметров нелинейных математических моделей на основе разностных уравнений при обработке результатов наблюдений. Представлены формулы статистической оценки дисперсий и ковариаций результатов вычислений коэффициентов разностного уравнения, а также параметров нелинейных функциональных зависимостей.

В п.3.3 описывается алгоритм итерационной процедуры среднеквадратичного оценивания коэффициентов разностного уравнения, позволяющий с высокой точностью обеспечить минимизацию квадрата евклидовой нормы $\|\varepsilon\|^2 = \|y - \hat{y}\|^2 \Rightarrow \min$, где ε – вектор случайного разброса в результатах наблюдений y относительно построенной нелинейной математической модели \hat{y} . В основе алгоритма лежит решение матричного уравнения

$(F^T \Omega_\lambda^{-1} F) \lambda - F^T \Omega_\lambda^{-1} b + \frac{1}{2} B_\lambda^T D_\lambda (b - F \lambda) = \bar{0}$, $\Omega_\lambda = P_\lambda P_\lambda^T$, B – блочная диагональная матрица размера $nN \times n$ с матрицами-столбцами $b - F \lambda$

по диагонали; D_λ – блочная матрица-столбец размера $nN \times N$, строки которой образуют матрицы $D_i = \frac{d\Omega_\lambda^{-1}}{d\lambda_i} = \left(\frac{d\omega_{ij}^{-1}}{d\lambda_i} \right)$, $i = 1, 2, \dots, n$, ω_{ij}^{-1} – элементы матрицы Ω_λ^{-1} . Пренебрегая вектором $B_\lambda^T D_\lambda (b - F\lambda)$ второго порядка малости относительно вектора невязки $\eta = b - F\lambda$, отсюда получаем соотношение, лежащее в основе построения последовательности приближенных решений $\lambda^{(k)}$ обобщенной регрессионной модели (2): $\lambda = [F^T \Omega_\lambda^{-1} F]^{-1} F^T \Omega_\lambda^{-1} b$. Проведенные численно-аналитические исследования показали, что такое упрощение практически не влияет на величину минимума остаточной суммы квадратов $\|y - \hat{y}\|^2$.

Алгоритм итерационной процедуры включает следующие основные шаги:

- вычисление начального приближения $\hat{\lambda}^{(0)}$ вектора коэффициентов регрессионной модели, например, на основе минимизации невязки по формуле $\hat{\lambda}^{(0)} = (F^T F)^{-1} F^T b$;

- вычисление элементов матрицы линейного преобразования вектора остатков P_λ : $P_{\hat{\lambda}^{(k)}} = P_\lambda(\hat{\lambda}^{(k)})$, и её обратной матрицы $P_{\hat{\lambda}^{(k)}}^{-1}$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ – номер итерации;

- преобразование обобщенной регрессионной модели к виду $P_{\hat{\lambda}^{(k)}}^{-1} b = P_{\hat{\lambda}^{(k)}}^{-1} F \lambda + \varepsilon^{(k)}$, где $\varepsilon^{(k)} = P_{\hat{\lambda}^{(k)}}^{-1} \eta$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$;

- решение линейной регрессионной задачи $\|\hat{\varepsilon}^{(k)}\|^2 = \|P_{\hat{\lambda}^{(k)}}^{-1} b - P_{\hat{\lambda}^{(k)}}^{-1} F \hat{\lambda}^{(k+1)}\|^2 \rightarrow \min$. Минимизация данного функционала при фиксированном $\hat{\lambda}^{(k)}$

приводит к нормальной системе линейных алгебраических уравнений относительно вектора $\hat{\lambda}^{(k+1)}$: $F^T (P_{\hat{\lambda}^{(k)}} P_{\hat{\lambda}^{(k)}}^T)^{-1} F \hat{\lambda}^{(k+1)} = F^T (P_{\hat{\lambda}^{(k)}} P_{\hat{\lambda}^{(k)}}^T)^{-1} b$, решение которой позволяет получить новую уточненную среднеквадратичную оценку вектора регрессионных коэффициентов: $\hat{\lambda}^{(k+1)} = (F^T \Omega_{\hat{\lambda}^{(k)}}^{-1} F)^{-1} F^T \Omega_{\hat{\lambda}^{(k)}}^{-1} b$, где $\Omega_{\hat{\lambda}^{(k)}} = P_{\hat{\lambda}^{(k)}} P_{\hat{\lambda}^{(k)}}^T$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots$;

- сравнение двух последовательных приближений вектора оценок коэффициентов разностного уравнения: $|\hat{\lambda}^{(k+1)} - \hat{\lambda}^{(k)}| < \delta$, где δ – малая величина, погрешность решения. При выполнении данного условия итерационная процедура уточнения среднеквадратичных оценок завершается; в противном случае следует перейти ко второму шагу.

Приведены формулы для вычисления элементов p_{ij}^{-1} обратной матрицы линейного преобразования вектора остатков ε в результатах наблюдений для каждой из семнадцати функциональных зависимостей.

Представлены теоремы о достаточных условиях сходимости итерационной процедуры к решению векторного уравнения $\lambda = [F^T \Omega_\lambda^{-1} F]^{-1} F^T \Omega_\lambda^{-1} b$, приведены

следствия к этим теоремам. Рассмотрены различные подходы к выбору начального приближения вектора коэффициентов разностного уравнения, в основе которых в одном случае лежит минимизация невязки $\|\eta\|^2 = \|b - F\hat{\lambda}\|^2 \rightarrow \min$, а в другом – решение интерполяционной задачи. Представлены результаты численно-аналитических исследований результатов вычислений при оценивании параметров математических моделей в форме дробно-рациональных зависимостей, которые позволяют сделать вывод о быстрой сходимости и высокой эффективности описанной итерационной процедуры.

В п.3.4 описывается алгоритм уточнения коэффициентов разностного уравнения при их априори известной взаимосвязи, что позволяет повысить точность результатов вычислений. В основе этого алгоритма лежит преобразование разностных уравнений и использование дополнительной итерационной процедуры, которая позволяет уточнять оценки коэффициентов на каждом шаге вычислений.

В п.3.5 рассматривается задача определения параметров двумерных эволюционных процессов деформации ползучести различных материалов, являющейся актуальной в механике деформируемого твердого тела. Построены разностные схемы, описывающие результаты наблюдений с учетом случайного разброса данных эксперимента. Описан алгоритм численного метода параметрической идентификации двумерной функциональной зависимости на основе среднеквадратичного оценивания коэффициентов разностных схем. На основе имитационного моделирования проведены численно-аналитические исследования, результаты которых подтверждают высокую эффективность разработанного численного метода определения параметров двумерных эволюционных процессов.

В п.3.6 приведены результаты комплекса численно-аналитических исследований погрешности результатов вычисления оценок параметров нелинейных математических моделей, по каждой в отдельности из всей совокупности унитарных, логистических, дробно-рациональных зависимостей и зависимостей, содержащих гармоническую компоненту, а также степени адекватности моделей экспериментальным данным. В ходе исследований на основе компьютерного моделирования решались следующие основные задачи: исследование зависимости дисперсии и смещения оценок параметров от величины случайной помехи в результатах наблюдений; исследование влияния периода дискретизации на помехозащищенность и устойчивость предложенных алгоритмов вычислений на основе разностных уравнений; исследование сходимости итерационных процедур оценивания коэффициентов разностного уравнения. Результаты исследований представлены в виде более 70 графиков и позволяют сделать вывод о высокой эффективности разработанного численного метода определения параметров нелинейных математических моделей на основе разностных уравнений. В частности, для сходимости итерационной процедуры уточнения коэффициентов разностного уравнения в подавляющем большинстве случаев достаточно одной - двух итераций.

Четвертая глава посвящена апробации численных методов на основе разностных уравнений в задачах параметрической идентификации систем различной физической природы.

В п.4.1 решается задача разработки и исследования численного метода параметрической идентификации дифференциального оператора, описывающего процессы эволюции биологической популяции, на основе разностных уравнений. Построены линейно-параметрические дискретные модели как при известной численности популяции в начальный момент времени, так и в случае, когда эту величину можно оценить по произвольной выборке результатов наблюдений. Представлены результаты численно-аналитических исследований, подтверждающие высокую достоверность полученных соотношений и эффективность разработанного численного метода на основе разностных уравнений, описывающих результаты наблюдений.

В п.4.2 рассматривается задача определения параметров логистической функции Рамсея $\hat{y}(t) = C[1 - (1 + \alpha t)e^{-\alpha t}]$, широко применяемой при анализе экономических показателей и прогнозирования их поведения. Проводится анализ известных методов оценки параметров логисты Рамсея, построены соответствующие разностные уравнения, описан алгоритм численного метода среднеквадратичного оценивания их коэффициентов, представлены результаты численно-аналитических исследований на основе имитационного моделирования.

В п.4.3 рассматривается задача параметрической идентификации типовых ударных воздействий: прямоугольного, пилообразного, полусинусоидального импульсов и сложного колебательного удара, по результатам наблюдений их амплитудно-частотной характеристики. Для различных математических моделей, описывающих амплитудно-частотную характеристику при соответствующем типе ударного воздействия, построены линейно-параметрические дискретные модели в форме стохастических разностных уравнений. Получены соотношения, связывающие коэффициенты разностных уравнений с параметрами амплитудных спектров. Описан численный метод определения параметров типовых ударных воздействий по их амплитудно-частотной характеристике на основе среднеквадратичного оценивания коэффициентов разностного уравнения. Проведены численно-аналитические исследования, подтверждающие высокую помехоустойчивость разработанного метода.

В п.4.4 проводится сравнительный анализ двух методов определения параметров кривой ползучести на первой стадии: известного метода последовательного выделения экспоненциальных слагаемых, разработанного Ю.П. Самариним, и численного метода, в основе которого лежит среднеквадратичное оценивание коэффициентов разностного уравнения. По данным эксперимента деформации ползучести поливинилхлоридного пластиката при различных напряжениях методом последовательного выделения экспоненциальных слагаемых построены модели, содержащие по три экспоненты. При построении аппроксимаций кривых ползучести численным методом на основе разностных уравнений использовалась двух экспоненциальная модель. Построены соответствующие разностные уравнения, описаны элементы обобщенной регрессионной модели и алгоритм итерационной процедуры среднеквадратичного оценивания её коэффициентов. Представлены результаты моделирования для данных пяти образцов поливинилхлоридного пластиката. Делается вывод о том, что при одинаковой адекватности различных моделей экспериментальным

данным, модели, построенные на основе разностных уравнений, более просты и, следовательно, более надежны.

В п.4.5 рассмотрена математическая модель, описывающая в дифференциальной форме наследственную теорию ползучести с экспоненциальным ядром, а также

модель деформации ползучести в виде аппроксимации $p(t, \sigma) = \sum_{k=1}^s c_k (1 - e^{-\alpha_k t}) \sigma^n$.

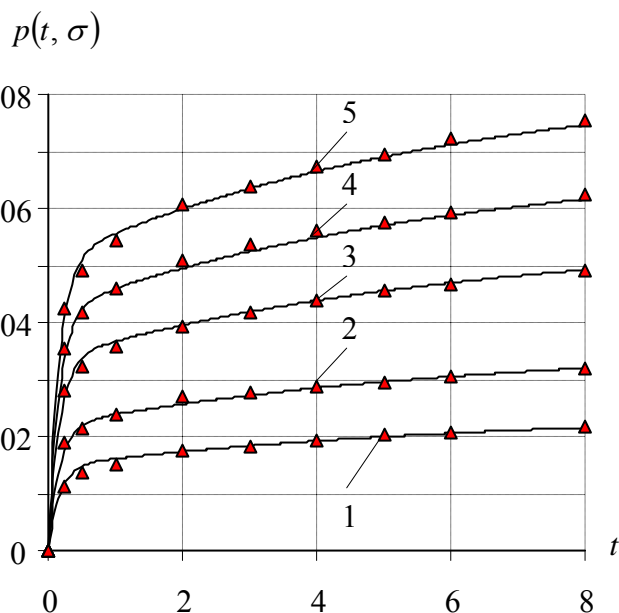
Описана процедура предварительной обработки экспериментальных данных при формировании разностной схемы на равномерной сетке: применение интерполяционных многочленов для равномерной дискретизации по переменной $\ln \sigma$ и скользящее сглаживание многочленом второй степени для равномерной дискретизации по временной переменной. Представлена разностная схема, описывающая сглаженные результаты эксперимента; приведены формулы для вычисления оценок параметров кривой ползучести через коэффициенты разностной схемы. С использованием численного метода параметрической идентификации на основе разностных уравнений, по экспериментальным данным для пяти образцов построена математическая модель

$\hat{p}(t, \sigma) = [0,0013(1 - e^{-0,16t}) + 0,002(1 - e^{-6,06t})] \sigma^{1,31}$, описывающая деформацию ползучести при нагружении трубчатых образцов поливинилхлоридного пластика. На рис. 1 показаны результаты расчета по предложенному методу определения параметров двумерных функциональных зависимостей при $s = 2$. Погрешность аппроксимации составляет 1,9%.

Пятая глава посвящена описанию комплекса программ для обработки экспериментальных данных, разработанных на основе алгоритмов среднеквадратичного оценивания коэффициентов разностных уравнений для определения параметров нелинейных математических моделей.

Разработанное программное обеспечение реализует помехозащищенные алгоритмы вычисления параметров четырнадцати различных по виду нелинейных функциональных зависимостей, систематизированных по классам: унитарные, логистические, дробно-рациональные зависимости и функции, содержащие гармоническую компоненту.

Программное обеспечение реализовано на языке Microsoft Visual Basic 6.0. Коды программы хранятся в девятнадцати модулях форм (в файлах с расширением frm) и двенадцати стандартных модулях (в файлах с расширением bas).



Р и с. 1 Экспериментальные данные (точки) деформации ползучести при различной величине напряжения и их аппроксимация (сплошные линии): 1 — $\sigma_1 = 4,66$; 2 — $\sigma_2 = 6,29$; 3 — $\sigma_3 = 8,75$; 4 — $\sigma_4 = 10,38$; 5 — $\sigma_5 = 12,02$.

Представлена блок-схема алгоритма вычисления параметров нелинейных математических моделей на основе разностных уравнений. Выделены основные этапы работы программы. Разработан и описан удобный для пользователя интерфейс: система диалоговых и информационных окон, предназначенных как для ввода исходных данных эксперимента, так и для вывода протокола результатов вычислений.

В заключении сформулированы основные результаты, полученные в диссертационной работе.

В приложении систематизировано в форме таблицы разработанное математическое описание для каждой из девятнадцати нелинейных зависимостей: линейно-параметрические дискретные модели в форме разностных уравнений; соотношения, описывающие взаимосвязь между коэффициентами разностных уравнений и параметрами нелинейной модели; элементы обобщенной регрессионной модели, лежащей в основе среднеквадратичного оценивания коэффициентов разностного уравнения. Представлены программные коды, реализующие описанный алгоритм вычислений оценок параметров нелинейных математических моделей на основе разностных уравнений.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

1. Построены и систематизированы новые линейно-параметрические дискретные модели в форме разностных уравнений для различных типов одномерных и двумерных нелинейных математических моделей. Получены соотношения, связывающие коэффициенты линейно-параметрических дискретных моделей с параметрами нелинейных функциональных зависимостей.

2. Разработан численный метод определения параметров нелинейных математических моделей, в основе которого лежит итерационная процедура среднеквадратичного оценивания коэффициентов разностного уравнения, описывающего результаты измерений исследуемого динамического или эволюционного процесса. Описаны основные этапы численного метода и проанализировано их содержание.

3. Предложена методика оценки погрешности вычисления параметров нелинейных математических моделей на основе разностных уравнений при обработке результатов наблюдений. Приведены формулы статистической оценки погрешности результатов вычислений коэффициентов разностного уравнения, а также параметров нелинейных функциональных зависимостей.

4. Разработан новый численный метод параметрической идентификации типовых ударных воздействий по результатам наблюдений их амплитудно-частотной характеристики.

5. Предложен новый численный метод определения параметров логистических функциональных зависимостей, описывающих эволюционные биологические или экономические процессы.

6. Разработан новый численный метод определения параметров нелинейной аппроксимационной зависимости для кривых ползучести поливинилхлоридного пластика по совокупности нескольких образцов материала. Проведен сравнительный анализ известного метода последовательного выделения экспоненциальных слагаемых и численного метода на основе разностных уравнений при построении

аппроксимаций для кривых ползучести.

7. На основе имитационного моделирования проведены численно-аналитические исследования эффективности разработанного численного метода оценивания параметров нелинейных математических моделей для унитарных, логистических, дробно-рациональных зависимостей, в том числе содержащих гармоническую компоненту.

8. Разработано программное обеспечение, реализующее в среде визуального и объектно-ориентированного языка программирования под управлением операционной системы *Windows* разработанные помехозащищенные алгоритмы вычисления параметров нелинейных функциональных зависимостей, которое может быть использовано при обработке результатов экспериментов и промышленных испытаний систем различной физической природы.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в журналах, рекомендованных ВАК России

1. Заусаева М.А., Зотеев В.Е. Определение постоянной времени последовательной активно-емкостной цепи на основе стохастического разностного уравнения // *Обозрение прикладной и промышленной математики*. – 2006. – Том 13, вып. 5. – С. 906-907.

2. Заусаева М.А., Зотеев В.Е. Помехозащищенный метод параметрической идентификации линейной динамической системы по ее импульсной характеристике // *Обозрение прикладной и промышленной математики*. – 2007. – Том 14, вып. 2. – С. 299-300.

3. Заусаева М.А., Зотеев В.Е. Разработка и применение стохастических разностных уравнений для систем с кратными корнями характеристического уравнения // *Обозрение прикладной и промышленной математики*. – 2008. – Том 15, вып. 2. – С.300.

4. Заусаева М.А., Зотеев В.Е. Определение параметров испытательных импульсов на основе стохастических разностных уравнений // *Вестник Самарского государственного технического университета*. Серия: Физико-математические науки. – 2008. – №2(17). – С.262-267.

5. Заусаева М.А., Зотеев В.Е. Определение параметров систем, описываемых уравнением Эйлера, на основе стохастических разностных уравнений // *Вестник Самарского государственного технического университета*. Серия: Физико-математические науки. – 2009. – №2(19). – С.160-167.

6. Заусаева М.А., Зотеев В.Е. Определение параметров двумерных динамических процессов на основе разностных схем // *Вестник Самарского государственного технического университета*. Серия: Физико-математические науки. – 2010. – №1(20). – С.154-161.

7. Зотеев В.Е., Заусаева М.А., Егорова А.А. Параметрическая идентификация дифференциальных операторов для систем с турбулентным трением на основе разностных уравнений // *Вестник Самарского государственного технического университета*. Серия: Физико-математические науки. – 2010. – №5(21). – С.132-140.

8. Зотеев В.Е., Романюк М.А., Егорова А.А. Проблема сходимости итерационной процедуры в задаче параметрической идентификации систем с турбулентным трением // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2011. – №3(24). – С.108-115.

9. Зотеев В.Е., Романюк М.А. Параметрическая идентификация математических моделей в форме дробно-рациональных зависимостей на основе разностных уравнений // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2012. – №3(28). – С.102-112.

Патенты и авторские свидетельства

10. Романюк М.А., Зотеев В.Е. Комплекс программ для обработки экспериментальных данных в задачах определения характеристик нелинейности математических моделей на основе разностных уравнений. ИНИПИ РАО ОФЭРНиО. Свидетельство о регистрации электронного ресурса №19275 от 10.06.2013.

Публикации в других журналах и сборниках научных трудов

11. Заусаева М.А., Зотеев В.Е. Метод последовательных приближений при среднеквадратичном оценивании параметров переходного процесса // В сб.: Математическое моделирование и краевые задачи. Труды Третьей Всероссийской научной конференции. Часть 2. – Самара: СамГТУ, 2006. – С.72-78.

12. Заусаева М.А., Зотеев В.Е. Определение параметров линейной динамической системы по экспериментальным данным // В сб.: Актуальные проблемы современной науки. Труды 2-го Международного форума (7-й Международ. конф. молодых ученых и студентов). Естественные науки. Части 1-3: Математика. Математическое моделирование. Механика. – Самара: СамГТУ, 2006. – С.54-59.

13. Заусаева М.А., Зотеев В.Е. Применение стохастических разностных уравнений в задаче параметрической идентификации линейной динамической системы // В сб.: Математическое моделирование и краевые задачи. Труды Четвертой Всероссийской научной конференции. Часть 4. – Самара: СамГТУ, 2007. – С.54-58.

14. Заусаева М.А., Зотеев В.Е. Определение диссипативных характеристик механической системы с конечным числом степеней свободы на основе стохастических разностных уравнений колебаний // В сб.: Математическое моделирование в естественных науках. Тезисы докладов 16-ой Всероссийской конференции молодых учёных. – Пермь: ПГТУ, 2007. – С. 43.

15. Заусаева М.А., Зотеев В.Е. Параметрическая идентификация линейной динамической системы при кратных корнях характеристического уравнения // В сб.: Актуальные проблемы современной науки. Труды 3-го Международного форума (8-й Международ. конф. молодых ученых и студентов). Естественные науки. Части 1-2: Математика. Математическое моделирование. – Самара: СамГТУ, 2007. – С.113-120.

16. Заусаева М.А. Параметрическая идентификация динамических систем при кратных корнях характеристического уравнения // В сб.: XXXIV Гагаринские чтения. Научные труды Международной молодежной научной конференции. Том 1. – Москва: МАТИ, 2008. – С 132-133.

17. Заусаева М.А., Зотеев В.Е. Параметрическая идентификация типовых ударных воздействий по их амплитудно-частотной характеристике // В сб.: Матема-

тическое моделирование и краевые задачи. Труды Пятой Всероссийской научной конференции. Часть 5. – Самара: СамГТУ, 2008. – С.58-64.

18. Заусаева М.А., Зотеев В.Е. Исследование смещения среднеквадратичных оценок коэффициентов разностного уравнения линейной динамической системы // В сб.: Актуальные проблемы современной науки. Труды 4-го Международного форума (9-й Международ. конф. молодых ученых и студентов). Естественные науки. Части 1-3: Математика. Математическое моделирование. – Самара: СамГТУ, 2008. – С.113-120.

19. Заусаева М.А., Зотеев В.Е. Параметрическая идентификация испытательных импульсов по их амплитудному спектру // В сб.: Математическое моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов. Труды седьмой международной конференции. – Ульяновск: УлГУ, 2009. – С. 111.

20. Заусаева М.А., Зотеев В.Е. Разработка и исследование методов оценки параметров испытательных импульсов для задач диагностики механической системы // В сб.: Ресурс и диагностика материалов и конструкций: Тезисы IV Всероссийской научно-технической конференции. – Екатеринбург: ИМАШ УрО РАН, 2009. – С. 120.

21. Заусаева М.А., Зотеев В.Е. Параметрическая идентификация систем, описываемых дифференциальным уравнением Эйлера // В сб.: Математическое моделирование и краевые задачи. Труды Шестой Всероссийской научной конференции. Часть 4. – Самара: СамГТУ, 2009. – С.54-61.

22. Заусаева М.А. Параметрическая идентификация пространственно-временных процессов на основе двумерных разностных схем // В сб.: Современные проблемы математики и ее прикладные аспекты. Материалы всероссийской научно-практической конференции молодых ученых. – Пермь: ПГУ, 2010. – С. 106.

23. Заусаева М.А. Разработка и исследование метода определения параметров двумерных динамических процессов на основе линейно-параметрических дискретных моделей // В сб.: Международная молодежная научная конференция по естественнонаучным и техническим дисциплинам «Научному прогрессу – творчество молодых». Часть 1. – Йошкар-Ола: МарГТУ, 2010. – 328 с.

24. Заусаева М.А., Зотеев В.Е. Повышение эффективности численного метода параметрической идентификации двумерных динамических процессов // В сб.: Математическое моделирование и краевые задачи. Труды Седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Часть 4. – Самара: СамГТУ, 2010. – С.65-71.

25. Заусаева М.А., Зотеев В.Е. Численный метод параметрической идентификации двумерных динамических процессов на основе разностных схем // В сб.: Тринадцатая Международная научная конференция им. академика М. Кравчука. Материалы конференции II. – Киев, 2010. – С. 124.

26. Заусаева М.А., Зотеев В.Е. Определение параметров логистической функции Рамсея на основе разностных уравнений // В сб.: Информационные, измерительные и управляющие системы. Материалы Международной научно-технической конференции. – Самара: СамГТУ, 2010. – С. 299-304.

27. Заусаева М.А. Численный метод параметрической идентификации логистической функции Рамсея на основе стохастических разностных уравнений //

В сб.: Актуальные проблемы современной науки. Труды 5-го Международного форума (10-й Международ. конф. молодых ученых и студентов). Естественные науки. Части 1-3: Математика. Математическое моделирование. – Самара: СамГТУ, 2010. – С.95-102.

28. Заусаева М.А. Параметрическая идентификация унитарных функциональных зависимостей // В сб.: Математическое моделирование и краевые задачи. Труды Восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Часть 2. – Самара: СамГТУ, 2011. – С.159-165.

29. Романюк М.А., Зотеев В.Е. Применение разностных уравнений в задаче определения параметров экспоненциальных математических моделей с переменным коэффициентом // В сб.: Математическое моделирование и краевые задачи. Труды Девятой Всероссийской научной конференции с международным участием. Часть 2. – Самара: СамГТУ, 2013. – С.127-132.

Автореферат отпечатан с разрешения диссертационного совета
Д 212.217.03 ФГБОУ ВПО «Самарский государственный технический университет»
(протокол №4 от 15 сентября 2014 г.)

Заказ №812 Тираж 100 экз.

Отпечатано на ризографе.
ФГБОУ ВПО «Самарский государственный технический университет»

Отдел типографии и оперативной печати
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.