На правах рукописи

Салихов Рустам Назипович

Нелокальные задачи для вырождающихся гиперболических уравнений

01.01.02 – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Казань – 2008

Работа выполнена на кафедре прикладной математики и информатики Самарского государственного технического университета.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Репин Олег Александрович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Логинов Борис Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор Хайруллин Равиль Сагитович
Ведущая организация:	Орловский государственный университет

Защита состоится 3 декабря 2008 г. в 14.30 часов на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском государственном университете, расположенном по адресу: 420008, г. Казань, ул. Университетская, 17, НИИММ, ауд. 324.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке им. Н. И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан 17 октября 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физ.-мат. наук, доцент Е. К. Липачев

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Теория краевых задач для уравнений гиперболического и смешанного типа в настоящее время является очень важным разделом теории дифференциальных уравнений с частными производными. Во многих научных школах России (Москва, Нальчик, Самара, Казань) и за рубежом (Минск, Алма-Ата, Ташкент, Бишкек) бурно развивается направление нелокальных краевых задач, в том числе задач с операторами дробного интегро-дифференцирования в граничных условиях, т.е. таких задач для дифференциальных уравнений в частных производных, в которых краевые условия представляют собой соотношения между значениями искомых функций, вычисленными в различных (переменных) точках, лежащих на границе или внутри рассматриваемой области.

Такое внимание к теории нелокальных краевых задач не случайно, так как дифференциальные уравнения с частными производными нашли важные применения в различных задачах математической физики, химии и т.п. Они имеют большое значение при математическом моделировании нефтяных пластов, фильтрации грунтовых вод, переноса тепла и массы в объекте, имеющего сложное строение, электрических колебаний в проводах, движения жидкости в канале окруженной пористой средой и других явлениях. Как отмечено в обзорной статье О. А. Олейник[1], изучение математической модели математическими методами позволяет не только получить качественные характеристики физических явлений и рассчитать с заданной степенью точности ход реального процесса, но и дает возможность проникнуть в суть физических явлений, а иногда предсказать и новые физические эффекты. Эти практические приложения дифференциальных уравнений в частных произ-

[1]Олейник, О. А. Роль теории дифференциальных уравнений в современной математике и ее приложениях / О. А. Олейник // СОЖ.— 1996.— С. 114—121.

водных приводят к необходимости изучения как локальных, так и нелокальных краевых задач для уравнений различного типа.

Основой развития краевых задач со смещением явились важные исследования, полученные В. И. Жегаловым и А. М. Нахушевым. Глубокие результаты в этом направлении представлены в работах А. В. Бицадзе, В. А. Ильина, Е. И. Моисеева, Г. Д. Каратопраклиева, Л. С. Пулькиной, Ф. Г. Мухлисова, Р. С. Хайруллина, Н. Б. Плещинского, К. Б. Сабитова, А. Н. Зарубина, А. И. Кожанова, С. А. Алдашева и других математиков.

Благодаря исследованию А. М. Нахушева, его учеников и последователей, стала бурно развиваться теория задач со смещением, краевые условия которых содержат операторы дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля. Нелокальным задачам, содержащим операторы дробного интегро-дифференцирования, посвящены работы таких известных математиков и их учеников как М. М. Смирнов, М. С. Салахитдинов, В. А. Елеев, А. А. Килбас, О. А. Репин, А. В. Псху, С. К. Кумыкова, М. Е. Лернер, А. А. Андреев, А. Хасанов, Д. Аманов, С. И. Макаров, Е. Н. Огородников, З. А. Нахушева и другие.

Настоящая работа посвящена продолжению исследований в этом направлении. Ставятся различные нелокальные задачи с операторами дробного интегро-дифференцирования в краевых условиях. Актуальность исследований краевых задач, когда граничные условия содержат операторы дробного интегро-дифференцирования, можно обосновать как внутренними потребностями теоретического обобщения классических задач для уравнений математической физики, так и прикладным значением этих задач, играющих большую роль в малоизученных задачах и проблемах современной физики, химии, биологии, механике, явлениях в средах с фрактальной структурой.

Цель диссертационной работы. Целью работы является:

1. Доказательство единственности и существования решений новых крае-

вых задач с операторами обобщенного дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля, М. Сайго и Эрдейи-Кобера в граничных условиях для уравнений

$$|y|^{2m}u_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_y = 0 \tag{1}$$

и

$$|y|^{2m}u_{xx} - sign(y)(yu_{yy} + \alpha u_y) = 0\,, \tag{2}$$

где m и α — заданные действительные постоянные.

2. Изучение влияния изменения спектра значений параметров m и α уравнений (1) и (2), а также параметров в краевых условиях на корректность исследуемых задач.

3. Разработка методики сведения изучаемых задач со смещением к интегральным уравнениям Вольтерра и сингулярным интегральным уравнениям.

4. Выделение и исследование частных случаев, допускающих получение решений в замкнутом виде.

Общая методика исследования. Для доказательства существования и единственности решения задач применялись теория дифференциальных уравнений с частными производными, аппарат дробного интегро-дифференцирования и специальных функций, теория интегральных уравнений.

Научная новизна. Работа содержит следующие элементы научной новизны:

1. Постановка и исследование новых нелокальных задач для вырождающихся гиперболических уравнений, краевые условия которых содержат операторы дробного интегро-дифференцирования или их комбинации в смысле Римана-Лиувилля, Эрдейи-Кобера, М. Сайго.

2. Изучение эффекта влияния как параметров дифференциального уравнения, так и параметров операторов дробного интегрирования и дифференцирования на корректную постановку краевых задач со смещением.

3. Разработка методов сведения исследуемых задач к вопросам разрешимости интегральных уравнений Вольтерра второго рода и сингулярных интегральных уравнений.

4. Исследование частных случаев, допускающих возможность нахождения явных решений изучаемых задач.

Практическая ценность. Как локальные, так и нелокальные краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных представляют наибольший интерес среди математических моделей различных явлений механики сплошной среды, химических реакций, электрических и магнитных явлений и других процессов.

Материалы диссертации в большей степени носят не столько практический, сколько теоретический характер. Полученные результаты исследования могут быть использованы для дальнейшей разработки общей теории нелокальных краевых задач для уравнений различных типов и представляют интерес для широкого круга математиков и специалистов, работающих в области дифференциальных уравнений, краевых задач, дробного интегро-дифференцирования, интегральных уравнений и в смежных областях, так или иначе связанных с использованием полученных результатов.

Отметим, что уравнение (1) являлось предметом изучения многих математиков. А. В. Бицадзе оно было предложено и исследовано при
$\frac{(1-2m)}{2} \leq \alpha < 1$ как модель уравнений смешанного типа, порядок которого вырождается вдоль линии изменения типа. Он показал, что задача Коши с данными на линии вырождения $y = 0$, вообще говоря, не является корректной по Адамару. В связи с этим были предложены видоизмененные постановки задачи Коши для этого уравнения. Заметим также, что уравнения (1) и (2) в характеристических координатах можно представить в виде уравнения Эйлера-Дарбу, однако для наших исследований удобнее использовать данные уравнения в координатах (x, y).

Результаты и положения, выносимые на защиту

1. Приведены доказательства:

- теорем существования и единственности решения задач в области D_1 (см. рис. 1, с. 10) для уравнения (1) с операторами дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля в краевых условиях;
- теорем существования и единственности решения задач в области D_1 для уравнения (1) с операторами дробного интегро-дифференцирования в смысле Эрдейи-Кобера и М. Сайго в краевых условиях;
- теоремы существования и единственности решения задачи в области D_3 (см. рис. 2, с. 14) для уравнения (2) с операторами дробного интегро-дифференцирования в смысле Эрдейи-Кобера и М. Сайго в краевых условиях.

2. Установлены интервалы изменения параметров в краевых условиях поставленных задач, при которых справедливы теоремы единственности и существования решений этих задач.

3. Разработана методика, позволяющая сводить вопросы существования и единственности изучаемых задач к вопросам существования и единственности решений характеристического сингулярного интегрального уравнения, либо уравнения Вольтерра 2-го рода.

4. Для задачи 1 исследованы два частных случая, позволяющие выписать решение задачи в явном виде.

Апробация работы. Основные положения диссертации и полученные результаты доложены на следующих международных и российских симпозиумах, конференциях и семинарах:

— научные семинары кафедры прикладной математики и информатики Самарского государственного технического университета в 2005–2008 гг. (руководитель д.ф.-м.н., профессор В. П. Радченко) ;

— 6-ая международная конференция "Актуальные проблемы современной науки" (Самара: СамГТУ, сентябрь 2005г.);

— третья Всероссийская научная конференция "Математическое моделирование и краевые задачи" (Самара: СамГТУ, май 2006г.);
— международная конференция "Современные методы физико-математических наук" (Орел: ОГУ, октябрь 2006г.);
— международный Российско-Азербайджанский симпозиум "Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики" (Нальчик-Эльбрус: НИИ ПМА, май 2008г.);
— международная научная конференция "Дифференциальные уравнения и смежные проблемы" (Стерлитамак: СГПА, июнь 2008г.);
— научный семинар кафедры "Дифференциальные уравнения" Казанского государственного университета в 2008 г. (руководитель д.ф.-м.н., профессор В. И. Жегалов).

Публикации. По результатам исследований опубликовано 11 печатных работ по теме диссертации в российских научных изданиях, сборниках докладов симпозиумов и конференций.

Личный вклад автора. В совместных работах [6, 9] соавтору Репину О. А. принадлежат постановка задач и идея доказательств. Салихову Р. Н. принадлежат доказательства существования и единственности решения задач и оформление статей.

Структура и объем диссертации. Диссертация изложена на 101 странице, включая библиографию. Работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка использованной литературы. Библиографический указатель включает 98 источников, из них 5 - иностранных авторов. Работа иллюстрирована 3 рисунками.

Выражение признательности. Автор выражает искреннюю благодарность и признательность за большую помощь и поддержку на всех этапах работы научному руководителю, заведующему кафедрой математической статистики и эконометрики Самарского государственного экономиче-

ского университета д.ф.-м.н., профессору Репину Олегу Александровичу и заведующему кафедрой прикладной математики и информатики Самарского государственного технического университета д.ф.-м.н., профессору Радченко Владимиру Павловичу.

Содержание работы.

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения. Далее следуют сведения, носящие вспомогательный характер. Вводятся определения операторов дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля, Эрдейи-Кобера, М. Сайго и приводятся некоторые их свойства, необходимые в дальнейшем.

В главе 1 рассмотрены краевые задачи с операторами дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля для уравнения (1), когда $\frac{1}{2} - m \leqslant \alpha < 1,\ m > \frac{1}{2}$.

Обозначим через D_1 — конечную односвязную область плоскости независимых переменных x и y, ограниченную характеристиками

$$AC : x - \frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}} = 0\,, BC : x + \frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}} = 1$$

уравнения (1) и отрезком $\bar{J} \equiv AB = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$.

Введем следующие обозначения:

$$\Theta_0(x) = \left(\frac{x}{2}, -\left(\frac{x}{m_0}\right)^{\frac{m_0}{2}}\right)\,, \Theta_1(x) = \left(\frac{1+x}{2}, -\left(\frac{1-x}{m_0}\right)^{\frac{m_0}{2}}\right)$$

— точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $x \in J$, с характеристиками AC и BC соответственно; $m_0 = \frac{4}{2m+1}$ (рис. 1.).

В §1.1 для уравнения (1) изучена следующая задача:

Задача 1. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым усло-

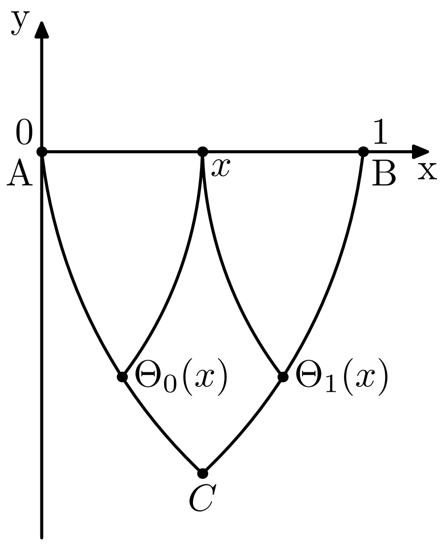

Рис. 1. Область D_1.

виям

$$u(x,0) = \tau(x), 0 \le x \le 1,$$

$$A(I_{0+}^{\gamma}u[\Theta_0])(x) + B(I_{1-}^{\gamma}u[\Theta_1])(x) = g(x), 0 < x < 1,$$

где $\tau(x)$ и $g(x)$ — известные функции, I_{0+}^{γ} и I_{1-}^{γ} — операторы дробного интегро-дифференцирования Римана-Лиувилля, A и B —действительные постоянные, $-1 < \gamma < 0$.

Вопрос существования и единственности решения задачи 1 сведен к вопросу разрешимости характеристического сингулярного интегрального уравнения. Решение задачи 1 получено в явном виде. Таким образом, доказана

Теорема 1. Пусть $\alpha = \frac{1}{2} - m$ и выполнены условия
$g(x) \in H^{\lambda}[0,1]$, $1+\gamma < \lambda < 1$, $\forall x \in [0,1]$ $\tau(x) = 0$,
$\frac{B}{A - B\cos\pi\gamma} \leqslant 0$, $A - B\cos\pi\gamma \neq 0$.
Тогда **задача 1** имеет, и притом единственное, решение.

В §1.2 вводится множество $W(AB)$ функций $u(x,y)$ таких, что

$$\lim_{y\to 0-}[a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u] \in C(\bar{J}),$$

где $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$ — заданные функции требуемой гладкости, причем, если не оговорено, предполагается существование пределов $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$ при $y \to 0-$. Здесь же рассматривается

Задача 2. Найти решение уравнения (1) из класса
$u(x,y) \in C(\bar{D}_1) \bigcap C^2(D_1) \bigcap W(AB)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\lim_{y\to 0-}[a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u] = d(x)\,,$$
$$A(I_{0+}^{\gamma}u[\Theta_0])(x) = B\nu(x) + \psi(x)\,,$$

где $\nu(x) = \lim\limits_{y\to 0-}(-y)^{\frac{1}{2}-m}u_y(x,y)\,,$

$a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$, $d(x)$ и $\psi(x)$ — заданные функции, A и B —действительные постоянные, A, $B \neq 0$, $\gamma > 0$, $m_0 = \frac{4}{2m+1}$, $\alpha = \frac{1}{2} - m$, $m > \frac{1}{2}$.

Вопрос существования и единственности решения задачи 2 сведен к вопросу разрешимости интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода. Результаты представлены в виде теоремы:

Теорема 2. Пусть $\alpha = \frac{1}{2} - m$ и выполнены условия
$a(x,\,y)$, $c(x,\,0)$, $d(x) \in C(\bar{J}) \bigcap C^1(J)$, $b(x,\,0) \in C(\bar{J})$,
$\psi(x) \in C^1(J)$, $a(x,0) \neq 0\ \forall x \in \bar{J}$.
Тогда **задача 2** имеет, и притом единственное, решение.

В §1.3 ставится задача, аналогичная **задаче 2**, но в последнем краевом условии функция $\nu(x)$ заменена на $\tau(x)$:

Задача 3. Найти решение уравнения (1) из класса
$u(x,y) \in C(\bar{D}_1) \bigcap C^2(D_1) \bigcap W(AB)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\lim_{y\to 0-}[a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u] = d(x)\,,$$
$$A(I_{0+}^{\gamma}u[\Theta_0])(x) = B\tau(x) + \psi(x)\,,$$

где $\tau(x) = u(x,0)$,
$a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$, $d(x)$ и $\psi(x)$ - заданные функции, A и B — действительные постоянные, A, $B \neq 0$, $\gamma > 2\beta+1$, $m_0 = \frac{4}{2m+1}$, $\beta = \frac{2m-1+2\alpha}{2(2m+1)}$, $\frac{1}{2}-m < \alpha < 1$, $m > \frac{1}{2}$.

Вопрос существования и единственности решения задачи 3 аналогично сведен к вопросу разрешимости интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода. Справедлива теорема:

Теорема 3. Пусть $\frac{1}{2} - m < \alpha < 1$ и выполнены условия
$b(x, y) = (-y)^\alpha b_1(x)$, $a(x, 0) = x a_1(x)$, $a(x, 0), c(x, 0) \in C^1(J)$,
$b_1(x), d(x), \psi(x) \in C^1(\bar{J}) \bigcap C^2(J)$, $b_1(x) \neq 0 \ \forall x \in \bar{J}$.
Тогда **задача 3** имеет, и притом единственное, решение.

В главе 2 рассмотрены нелокальные краевые задачи для уравнения (1) и аналогичного ему уравнения (2). Но в данной главе краевые условия содержат операторы в смысле М. Сайго и Эрдейи-Кобера.

Следуя И.Л. Каролю, в §2.1 вводится понятие класса R_2 функций и ставится следующая

Задача 4. Найти в области D_1 решение $u(x, y) \in R_2$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$\lim_{y \to 0-} \left[(I_{0+}^{a+1-2\beta, b+2\beta-1, c} a(t, y) u_y(t, y))(x) + (I_{0+}^{a,b,c} u(t, y))(x) \right] = \varphi_1(x),$$
$$A(E_{0+}^{\gamma, -\gamma+\beta-1} u[\Theta_0])(x) + B(I_{1-}^{\gamma-\beta+1, \delta, -\gamma+\beta-1} \lim_{y \to 0-} (-y)^\alpha u_y(t, y))(x) = \varphi_2(x),$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — известные функции, $E_{0+}^{\alpha,\gamma}$ — оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Эрдейи-Кобера, $I_{0+}^{\alpha,\beta,\gamma}$ и $I_{1-}^{\alpha,\beta,\gamma}$ — операторы дробного интегро-дифференцирования в смысле М. Сайго, A и B — действительные постоянные, A, $B \neq 0$, γ, δ, a, b, c — заданные числа, $\beta = \frac{2m-1+2\alpha}{2(2m+1)}$, $-2m < \alpha < \frac{1}{2} - m$, $m > \frac{1}{2}$.

Вопрос существования и единственности решения задачи 4 сведен к вопросу разрешимости характеристического сингулярного интегрального уравнения. Решение задачи 4 получено в явном виде. Результаты сформулированы в виде теоремы:

Теорема 4. Пусть $-2m < \alpha < \frac{1}{2} - m$ и выполнены условия
$a(x, y) = (-y)^\alpha a_1(x)$, $0 < \gamma - \beta + 1 < 1$, $\delta > -\gamma + \beta - 1$,

$-(b+2\beta-1) < \min\{0, a+2-2\beta+c\}$, $\lambda_0 > 0$, $0 < a+1-2\beta < \lambda_1 \leqslant 1$,
$\lambda_2 > 0$, $\varphi_2(x) = (I_{0+}^{\gamma-\beta+1,0,-\gamma+\beta-1}\varphi_3)(x)$, $a_1(x) \in H^{\lambda_0}[0,1]$,
$\varphi_1(x) \in H^{\lambda_1}[0,1]$, $\varphi_3(x) \in H^{\lambda_2}[0,1]$.
Тогда **задача 4** имеет, и притом единственное, решение.

В §2.2 рассмотрена задача, аналогичная **задаче 4**, но здесь ищется регулярное решение задачи, а также существенно изменено первое краевое условие.

Задача 5. Найти решение $u(x,y) \in C(\bar{D}_1) \bigcap C^2(D_1)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$\lim_{y\to 0-}\Big[(E_{0+}^{1-2\beta,2\beta-1}a(t,y)u_y(t,y))(x) + u(x,y)\Big] = \varphi_1(x), \quad (3)$$

$$A(E_{0+}^{\gamma,-\gamma+\beta-1}u[\Theta_0])(x) + B(I_{1-}^{\gamma-\beta+1,c,-\gamma+\beta-1}\lim_{y\to 0-}(-y)^{\alpha}u_y(x,y))(x) = \varphi_2(x), \quad (4)$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — известные функции, A и B — действительные постоянные, A, $B \neq 0$, γ, c — заданные числа, $\frac{1}{2} - m < \alpha < 1$, $m > \frac{1}{2}$.

Вопрос существования и единственности решения задачи 5 таким же образом сведен к вопросу разрешимости характеристического сингулярного интегрального уравнения. Решение задачи 5 получено в явном виде. Результаты сформулированы в виде теоремы:

Теорема 5. Пусть $\frac{1}{2} - m < \alpha < 1$ и выполнены условия
$a(x,y) = (-y)^{\alpha}xa_1(x)$, $0 < \gamma-\beta+1 < 1-2\beta$, $c > -\gamma+\beta-1$,
$\lambda_0 > 0$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\varphi_1 = (E_{0+}^{1-2\beta,2\beta-1}\psi_1)(x)$, $\varphi_2 = (E_{0+}^{\gamma-\beta+1,-\gamma+\beta-1}\psi_2)(x)$,
$a_1(x) \in H^{\lambda_0}[0,1]$, $\psi_1(x) \in H^{\lambda_1}[0,1]$, $\psi_2(x) \in H^{\lambda_2}[0,1]$.
Тогда задача **задача 5** имеет, и притом единственное, решение.

Далее в §2.3 рассмотрено уравнение (2), аналогичное (1), но в верхней полуплоскости $y > 0$ уравнение (2) является гиперболическим, в то время как уравнение (1) в данной области эллиптично.

Обозначим $D_3 = D_1 \cup D_2$, где
D_1 — конечная односвязная область плоскости независимых переменных x и

y, ограниченная характеристиками

$$AC_1 : x - \frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}} = 0\,, BC_1 : x + \frac{2}{2m+1}(-y)^{\frac{2m+1}{2}} = 1$$

уравнения (2) при y<0 и отрезком $\bar{J} \equiv AB = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$,

D_2 — конечная односвязная область плоскости независимых переменных x и y, ограниченная характеристиками

$$AC_2 : x - \frac{2}{2m+1}y^{\frac{2m+1}{2}} = 0\,, BC_2 : x + \frac{2}{2m+1}y^{\frac{2m+1}{2}} = 1$$

уравнения (2) при y>0 и отрезком $\bar{J}$.

Введем следующие обозначения $\Theta_0(x)$ и $\Theta_1(x)$ — точки пересечения характеристик уравнения (2), выходящих из точки $x \in J$ с характеристиками AC_1 и BC_2 соответственно (рис. 2.).

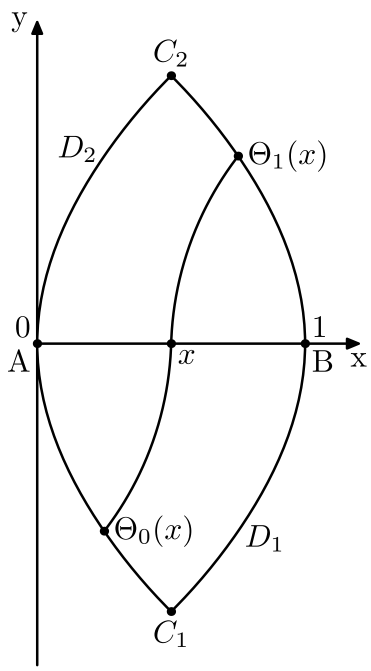

Рис. 2. Область D_3.

Для уравнения (2) изучим краевую задачу.

Задача 6. Найти функцию $U(x,y)$ со свойствами:

1) $LU \equiv 0$ в области $D_3 = D_1 \cup D_2$;

2) $U(x,y) \in C(\bar{D}_3) \cap C^1(\bar{D}_3 \backslash J) \cap C^2(\bar{D}_3 \backslash J)$;

$$3) \qquad \nu_1(x) = \lim_{y\to 0-} U_y(x,y)\,, \quad \nu_2(x) = \lim_{y\to 0+} U_y(x,y)\,, \quad x \in J;$$

$$4) \qquad \tau_1(x) = \lim_{y\to 0-} U(x,y)\,, \qquad \tau_2(x) = \lim_{y\to 0+} U(x,y)\,, \quad x \in \bar{J};$$

$$5) \qquad \tau_1(x) = \tau_2(x), \qquad \nu_1(x) = \nu_2(x);$$

$$6) \qquad A_1 I_{0+}^{a,b,-a-\beta} t^{2\beta-1} U[\Theta_0] + A_2 I_{0+}^{a+\beta,b+1-2\beta,-a-\beta} U[t,0-] + \\ + A_3 I_{0+}^{a+1-\beta,b,-a-\beta} U_y[t,0-] = \varphi_1(x)\,,$$

$$B_1 I_{1-}^{a^*,b^*,-a^*-\beta} (1-t)^{2\beta-1} U[\Theta_1] + B_2 I_{1-}^{a^*+\beta,b^*+1-2\beta,-a^*-\beta} U[t,0+] + \\ + B_3 I_{1-}^{a^*+1-\beta,b^*,-a^*-\beta} U_y[t,0+] = \varphi_2(x),$$

где $A_{1,2,3}$, $B_{1,2,3}$, a, a^*, b, b^* – некоторые вещественные константы, $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – известные функции, $\beta = \frac{2m-1+2\alpha}{2(2m+1)}$, $\frac{1}{2} - m < \alpha < 1$, $m > \frac{1}{2}$.

Вопрос существования и единственности решения задачи 6 сведен к вопросу разрешимости характеристического сингулярного интегрального уравнения. Решение задачи 6 получено в явном виде. Результаты сформулированы в виде теоремы:

Теорема 6. Пусть $\frac{1}{2} - m < \alpha < 1$ и выполнены условия
$a + \beta > 0$, $a^* + \beta > 0$, $A_1 M_1 + A_2 \neq 0$, $B_1 M_1 + B_2 \neq 0$,
$M_1 = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}$, $M_2 = \frac{\Gamma(1-2\beta)}{2\Gamma(1-\beta)} \left(\frac{2m+1}{4}\right)^{-2\beta}$,
функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ удовлетворяют условиям
$\varphi_1(x) = (I_{0+}^{a+\beta,b+1-2\beta,-a-\beta} \psi_1)(x)$, $\varphi_2(x) = (I_{1-}^{a^*+\beta,b^*+1-2\beta,-a^*-\beta} \psi_2)(x)$,
где $\psi_1(x) \in H^{\lambda_1}[0,1]$, $\psi_2(x) \in H^{\lambda_2}[0,1]$, $1 - 2\beta < \lambda_1 < 1$, $1 - 2\beta < \lambda_2 < 1$.
Тогда **задача 6** однозначно разрешима.

В §2.4 рассмотрена последняя задача с граничными условиями, содержащими несколько параметров:

Задача 7. Найти в области D_1 решение $u(x,y) \in C(\bar{D}_1) \bigcap C^2(D_1)$ уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$(E_{0+}^{1-2\beta,2\beta-1}a_1(t)\nu(t))(x)+\tau(x)=\varphi_1(x),$$
$$A(x)(I_{0+}^{\alpha_1,\beta_1,\gamma_1}u[\Theta_0])(x)+B(x)(I_{1-}^{\alpha_2,\beta_2,\gamma_2}u[\Theta_1])(x)+$$
$$+C(x)(I_{1-}^{\alpha_3,\beta_3,\gamma_3}\nu(t))(x)=\varphi_2(x),$$

где $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $a_1(x)$, $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — известные функции, $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$, $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2,\alpha_3,\beta_3,\gamma_3,$ — заданные числа, $\beta=\frac{2m-1+2\alpha}{2(2m+1)}$, $\frac{1}{2}-m<\alpha<1$, $m>\frac{1}{2}$. Обозначим далее $K_0=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma(\beta)}$, $K_1=\frac{\Gamma(1-2\beta)}{2\Gamma(1-\beta)}\left(\frac{4}{2m+1}\right)^{2\beta}$.

Задача 7 изучалась для нескольских случаев значений параметров. Вопрос существования и единственности решения задачи 7 во всех случаях сведен к вопросу разрешимости характеристического сингулярного интегрального уравнения. Решение задачи 7 получено в явном виде. Результаты сформулированы в виде теорем:

Теорема 7. Пусть $\frac{1}{2}-m<\alpha<1$ и выполнены условия
$\forall x\in\bar{J}$ $A(x)\neq 0$, $B(x)=0$, $C(x)=A(x)$, $\gamma_1=-\alpha_1-1+\beta$, $\alpha_3=\alpha_1+1-\beta$, $\gamma_3=-\alpha_1-1+\beta$, $a_1(x)\in H^{\lambda_1}$, $\lambda_1>0$, $\beta_1>\alpha_1+1-\beta$, $\beta_3>-\alpha_1-1+\beta$, $A(x)\in H^{\lambda_2}[0,1]$, $\varphi_2(x)\in H^{\lambda_2}[0,1]$, $0<\alpha_1+1-\beta<\lambda_2<1$, $0<\alpha_1+1-\beta<\lambda_3<1$, $(I_{0+}^{\alpha_1+\beta,\beta_1,\beta-1-\alpha_1}\varphi_1(t))(x)\in H^{\lambda_3}[0,1]$.
Тогда **задача 7** имеет, и притом единственное, решение.

Теорема 8. Пусть $\frac{1}{2}-m<\alpha<1$ и выполнены условия
$\forall x\in\bar{J}$ $A(x)=0$, $B(x)\neq 0$, $C(x)=0$, $\gamma_2=-\alpha_2-1+\beta$, $\alpha_2+\beta>0$, $a_1(x)=xa_2(x)$, $a_2(1)<\frac{K_1}{K_0}\cos 2\pi\beta$, $a_2(x)\in H^{\lambda_1}[0,1]$, $\lambda_1>0$, $0<1-2\beta<\lambda_2<1$, $0<1-2\beta<\lambda_3<1$, $(I_{1-}^{-\alpha_2-\beta,-\beta_2,2\beta-1}\frac{\varphi_2(t)}{B(t)})(x)\in H^{\lambda_2}[0,1]$, $\varphi_1(x)\in H^{\lambda_3}[0,1]$.
Тогда **задача 7** имеет, и притом единственное, решение.

Теорема 9. Пусть $\frac{1}{2}-m<\alpha<1$ и выполнены условия
$\forall x\in\bar{J}$ $A(x)=0$, $B(x)\neq 0$, $C(x)=B(x)$, $K_1\neq(1-x)^{2\beta-1-\beta_3+\beta_2}$, $\gamma_2=-\alpha_2-1+\beta$, $\alpha_3=\alpha_2+1-\beta$, $\gamma_3=-\alpha_2-1+\beta$, $\alpha_2+\beta>0$,

$2\beta-1-\beta_3+\beta_2>0$, $a_1(x)=xa_2(x)$, $a_2(1)<\frac{K_1}{K_0}\cos 2\pi\beta$, $a_2(x)\in H^{\lambda_1}[0,1]$, $\lambda_1>0$, $0<1-2\beta<\lambda_2<1$, $0<1-2\beta<\lambda_3<1$, $(I_{1-}^{-\alpha_2-\beta,-\beta_2,2\beta-1}\frac{\varphi_2(t)}{B(t)})(x)\in H^{\lambda_2}[0,1]$, $\varphi_1(x)\in H^{\lambda_3}[0,1]$.
Тогда **задача 7** имеет, и притом единственное, решение.

Теорема 10. Пусть $\frac{1}{2}-m<\alpha<1$ и выполнены условия $\forall x\in\bar{J}$ $A(x)=A=const$, $B(x)=B=const$, $C(x)=C=const$, $a_1(x)=0$, $\alpha_2=\alpha_1$, $\alpha_3=\alpha_1+1-\beta$, $\beta_3=\beta_2+2\beta-1$, $\gamma_3=-\alpha_1-1+\beta$, $\beta_1>0$, $-\alpha_1-\beta+\beta_1>0$, $\alpha_1+\beta+\beta_2>0$, $0<\alpha_1+1-\beta<\lambda_1<1$, $0<\alpha_1+1-\beta<\lambda_2<1$, $0<\alpha_1+1-\beta<\lambda_3<1$, $C-BK_1\neq 0$, $\varphi_2(x)\in H^{\lambda_1}[0,1]$, $(I_{0+}^{\alpha_1+\beta,\beta_1,\beta-1-\alpha_1}\varphi_1(t))(x)\in H^{\lambda_2}[0,1]$, $(I_{1-}^{\alpha_1+\beta,\beta_2,\beta-1-\alpha_1}\varphi_1(t))(x)\in H^{\lambda_3}[0,1]$.
Тогда **задача 7** имеет, и притом единственное, решение.

Публикации по теме диссертации

1. Салихов, Р. Н. Аналог задачи Дарбу и задачи со смещением для гиперболического уравнения с вырождением типа и порядка / Р. Н. Салихов // Всероссийская конференция. Дифференциальные уравнения и их приложения. Тезисы докладов. Самара: Издательство Универс-групп. — 2005. — С. 71–72.

2. Салихов, Р. Н. О нелокальных задачах для одного гиперболического уравнения второго порядка / Р. Н. Салихов // Актуальные проблемы современной науки. Естественные науки. Части 1,2. Математика. Математическое моделирование. Труды 1-го Международного форума молодых ученых (6-й Международной конференции). Самара: СамГТУ. — 2005. — С. 67–72.

3. Салихов, Р. Н. Видоизмененная первая задача Дарбу для одного гиперболического уравнения / Р. Н. Салихов // Математика. Механика. Информатика. Тезисы докладов Всероссийской научной конференции. Челябинск: ЧГУ. — 2006. — С. 123–124.

4. Салихов, Р. Н. Нелокальная задача с оператором Ердейи-Кобера для вырождающегося гиперболического уравнения / Р. Н. Салихов // Материалы XI международной научной конференции имени ак. М.Кравчука. Киев: НТУ.

— 2006. — С. 975.
5. Салихов, Р. Н. О задаче типа первой задачи Дарбу / Р. Н. Салихов // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды Третьей Всероссийской научной конференции. Самара: СамГТУ. — 2006. — С. 197–205.
6. Салихов, Р. Н. Существенно нелокальная задача для гиперболического уравнения с вырождением типа и порядка / Р. Н. Салихов, О. А. Репин // Современные методы физико-математических наук. Труды международной конференции. Орел: ОГУ. — 2006. —№ 1. — С. 110–114.
7. Салихов, Р. Н. Решение одной нелокальной задачи для гиперболического уравнения в замкнутой форме / Р. Н. Салихов // Вестник СамГТУ. Сер: физ.-мат. науки. Самара: СамГТУ. — 2007. — № 1(14). — С. 15–19.
8. Салихов, Р. Н. Нелокальная задача для вырождающегося уравнения гиперболического типа / Р. Н. Салихов // Материалы международного Российско-Азербайдж. симпозиума. Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и инф.. Нальчик-Эльбрус: НИИ ПМА. — 2008. — С. 236–237.
9. Салихов, Р. Н. Об одной краевой задаче для уравнения гиперболического типа / Р. Н. Салихов, О. А. Репин // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. Математика. Самара: СамГУ. — 2008. — № 2(61). — С. 52–59.
10. Салихов, Р. Н. О разрешимости нелокальной задачи для одного вырождающегося гиперболического уравнения / Р. Н. Салихов // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы. Труды международной научной конференции. Стерлитамак. — 2008. — Т. 1. — С. 174–178.
11. Салихов, Р. Н. О разрешимости в замкнутой форме нелокальной задачи для одного вырождающегося гиперболического уравнения / Р. Н. Салихов // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Ростов : ЮФУ. — 2008. — № 6. — С. 13–16.

Автореферат опубликован с разрешения диссертационного совета
Д 212.081.10 (протокол №4 от 25 сентября 2008 года)

Подписано в печать 14 октября 2008 г.
Заказ №688. Тираж 100 экз. Отпечатано на ризографе.
Самарский государственный технический университет.
Отдел типографии и оперативной полиграфии.
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.