ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Саушкин Иван Николаевич

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛОКАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ПЛОСКОСТИ

01.01.02 — «Дифференциальные уравнения»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Белгород — 2006

Работа выполнена на кафедре прикладной математики и информатики инженерно-экономического факультета Самарского государственного технического университета

Научный руководитель:	кандидат физико-математических наук, доцент Андреев Александр Анатольевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Зарубин Александр Николаевич
	доктор физико-математических наук, профессор Килбас Анатолий Александрович
Ведущая организация:	Казанский государственный университет

Защита состоится 14 февраля 2006 г. в 16.00 часов на заседании диссертационного совета К212.015.05 при Белгородском государственном университете по адресу: 308015, г.Белгород, ул. Студенческая, 14, ауд. 322.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Белгородского государственного университета.

Автореферат разослан 12 января 2006 года

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.ф.-м.н., профессор Глушак А.В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Понятие нелокального оператора и и связанное с ним понятие нелокального дифференциального уравнения появилось в математике сравнительно недавно. В соответствии с определением, приведенным А.М. Нахушевым в его монографии[1], к числу нелокальных дифференциальных уравнений относятся: нагруженные уравнения, уравнения, содержащие дробные производные искомой функции, уравнения с отклоняющимися аргументами, иными словами, такие уравнения, в которых неизвестная функция и ее производные входят, вообще говоря, при различных значениях аргументов.

В 50–60 годы XX века в связи с возросшим интересом к задачам теории управления стала интенсивно развиваться теория обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим или опережающим аргументом. В этот период вышли хорошо известные монографии отечественных авторов Н.М. Красовского, А.Д. Мышкиса, С.Б. Норкина, Л.Э. Эльсгольца, и иностранных ученых Р. Беллмана и К. Кука, Э. Пинни, А. Халаная.

Среди дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами особое место занимаю уравнения, в которых отклонение аргументов носит знакопеременный характер. К числу таких отклонений относится так называемое отклонение инволютивного типа. Отображение $\alpha(t)$, которое является изменяющим ориентацию гомеоморфизмом простой непересекающейся замкнутой или разомкнутой кривой в комплексной плоскости, принято называть карлемановским сдвигом или инволютивным отклонением, если $\alpha^2(t) \equiv \alpha(\alpha(t)) = t$. Свойства этого гомеоморфизма приведены и изучены в монографиях З. Нитецкого, Г.С. Литвинчука, Н.К. Карапетянца и С.Г. Самко. В дальнейшем эти свойства использовались многими авторами при исследовании разнообразных уравнений, содержащих тот или иной инволютивный оператор — сингулярных интегральных уравнений, функциональных уравнений, в краевых задачах теории аналитических функций, в уравнениях типа свертки и так далее.

Хорошо известно, что дифференциальные уравнения, содержащие инволютивное отклонение в искомой функции или ее производной, являются некоторыми модельными уравнениями со знакопеременным отклонением аргумента. В целом, такие уравнения можно отнести к классу функционально-дифференциальных уравнений.

Впервые обыкновенные дифференциальные уравнения с инволютивным отклонением упоминаются в работе Ч. Баббеджа еще в 1816 году.

В последнее время достигла заметных результатов теория нелокальных, по терминологии А.А. Дезина, задач. Решение многих практически важных задач, связанных с динамикой почвенной влаги, описанием процесса диф-

[1] *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. — М.: Высшая школа, 1995. 301 с.

фузии частиц в турбулентной плазме, моделированием процесса излучения лазера и диффузии в трехкомпонентных системах, приводит к нелокальным краевым условиям. Как отмечено, например, в монографии А.М. Нахушева, упомянутой выше, исследования последних лет убедительно показывают, что в математической биологии весьма часто возникают как нелокальные краевые, так и смешанные начально-краевые задачи. Такие задачи возникают, в частности, при моделировании процесса размножения микробных популяций в биологическом реакторе.

Исследование нелокальных краевых задач было начато в работах В.И. Жегалова[2], А.В. Бицадзе, А.А. Самарского[3], и А.М. Нахушева[4].

В период с 70-х по 90-е годы в указанном направлении появилась серия работ М.Х. Абрегова, А.А. Андреева, Х.Г. Бжихатлова, А.В. Бицадзе, В.Ф. Волкодавова, Х.Ш. Джураева, В.И. Жегалова, Н.И. Ионкина, С.К. Кумыковой, Е.И. Моисеева, А.М. Нахушева, А.И. Прилепко, О.А. Репина, А.А. Самарского, М.М. Смирнова, А.П. Солдатова, В.А. Стеклова, Я.Д. Тамаркина, Ф.И. Франкля, A.M. Krall, M. Picone и других.

Среди первых работ по исследованию краевых задач для уравнений в частных производных второго порядка с отклонениями в старших производных следует отметить работы И.М. Гуля и А.Б. Нерсесяна, в которых было обращено внимание на эффект влияния отклонения аргумента на корректность постановок классических задач.

Следует также отметить работы, посвященные исследованию как классических, так и нелокальных задач для дифференциальных уравнений в частных производных с отклонением аргументов в младших и старших производных А.А. Андреева, Э.Ш. Баллы и И.И. Маркуша, В.А. Домбровского и В.И. Фодчука, А.Н. Зарубина, А.В. Линькова, Т.Ш. Кальменова и М.А. Садыбекова, В.Р. Носова, Е.Н. Огородникова, В.В. Подгорнова, Б.И. Пташника, З.Б. Сеидова, А.Ю. Сеницкого, А.Л. Скубачевского, Б.П. Ткача.

Заметим, что к подобным нелокальным уравнениям сводятся некоторые задачи интегральной геометрии, обратные задачи кинематической сейсмики и геофизики, задачи колебания, вызванные двумя синхронными источниками, задачи теории упругости, теории магнитогидродинамических течений, теории распространения упругих электромагнитных волн, описываемых уравнением Максвелла с памятью, теории пластичности и ползучести, когда нельзя пренебречь наличием запаздывания деформаций в теле относительно приложенных напряжений и другие.

Прикладное значение теории нелокальных дифференциальных уравнений обусловлено тем обстоятельством, что, как отмечают многие авторы, теория

---

[2] *Жегалов В.И.* Краевая задача для уравнения смешанного типа с граничными условиями на обеих характеристиках и с разрывами на переходной линии // Уч. записки КГУ, 1962. Т.122. Кн.3. С. 3–16.

[3] *Бицадзе А.В., Самарский,А.А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. 1969. Т. 185. №4. С. 739–740.

[4] *Нахушев А.М.* Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения // Докл. АН СССР. 1969. Т.187. №4. С. 736–739.

обыкновенных дифференциальные уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных, содержащих инволютивные отклонения аргументов искомых функций и их производных, изучена явно недостаточно и остается весьма далекой от своего завершения.

Цель работы. Целью диссертационной работы является постановка и изучение методов решения как классических так и неклассических начальных и начально-краевых задач для одного класса нелокальных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка на плоскости с инволютивными отображениями аргументов, обоснование корректности этих задач, доказательство соответствующих теорем существования и единственности решений, что и определяет структуру работы и содержание ее отдельных глав.

Методы исследования. Основные результаты диссертации получены путем редукции поставленных классических краевых задач или их аналогов для изучаемых нелокальных дифференциальных уравнений к классическим или известным неклассическим краевым задачам для определенным образом получаемых систем двух локальных дифференциальных уравнений, применением методов Римана, Римана-Адамара, Фурье, теории сингулярных интегральных уравнений, краевых задач Римана и специальных функций.

Научная новизна. В диссертационной работе получены следующие новые результаты:

1) приведен пример обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с переменными коэффициентами, содержащего искомую функцию, вычисленную в инволютивной точке, для которого показано неравноправие левосторонней и правосторонней задач Коши в смысле единственности решения, а также показано влияние инволюции на свойства решений;

2) для телеграфного уравнения, возмущенного значением искомой функции в инволютивных точках специального вида, найдено решение в явном виде и обоснована корректность классической задачи Коши, показано влияние инволюции на асимптотику решения задачи Коши; найдены решения в явном виде и обоснована корректность двух нелокальных характеристических задач;

3) для одного нелокального уравнения, порожденного дифференциальным оператором второго порядка, возмущенным оператором того же семейства относительно искомой функции, вычисленной в инволютивных точках, обоснована корректность задачи Коши, квазихарактеристических задач Гурса, Коши-Гурса и Дарбу с заданием нелокальных условий на части квазихарактеристик, решения найдены в явном виде;

4) для одного уравнения с нелокальным дифференциальным оператором второго порядка, возмущенного оператором того же семейства относительно искомой функции, вычисленной в инволютивных точках, методом Фурье обоснована корректность и найдено решение в явном виде задачи Дирихле в прямоугольной области;

5) для уравнений, порожденных операторами типа Лаврентьева-Бицадзе с одной, двумя перпендикулярными и двумя параллельными линиями вырождения типа и возмущенных значениями второй производной искомой функции вычисленной в инволютивных точках, рассмотрены аналоги задачи Трикоми в неограниченных симметричных областях, обоснована их корректность и найдены решения в явном виде.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. В ней продолжены исследования в области классических и нелокальных краевых задач для одного класса нелокальных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с инволютивными отображениями аргументов.

Результаты работы могут быть использованы в качестве основы для дальнейшей разработки теории классических и нелокальных краевых и начально-краевых задач для нелокальных уравнений с инволютивными отображениями аргументов.

Практическая значимость заключается в возможности применить полученные результаты к исследованию конкретных дифференциальных уравнений, являющихся моделями физических и природных процессов.

Апробация работы. Основные результаты и содержание работы докладывались и обсуждались на
— международной конференции «Математическое моделирование, статистика и информатика в современном управлении экономикой», посвященной 70-летию Самарской государственной экономической академии (июнь 2001 г.) в СамГЭА, г. Самара;
— научной конференции «Проблемы современной математики», посвященной 125-летию Казанского государственного педагогического университета (22–24 октября 2001 г.) в КГПУ, г. Казань;
— второй международной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (3–7 декабря 2001 г.) в НИИ ПМА КБНЦ РАН, г. Нальчик;
— международном Российско-Узбекском симпозиуме «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики» (18–25 мая 2003 г.) в НИИ ПМА КБНЦ РАН, г. Нальчик–п. Эльбрус;
— международном Российско-Казахском симпозиуме «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики» (22–26 мая 2004 г.) в НИИ ПМА КБНЦ РАН, г. Нальчик–п. Эльбрус;
— ежегодном Всероссийском симпозиуме по прикладной и промышленной математике (2003–2005 гг.) в Сочинском госуниверситете ТиКД, г. Сочи;
— ежегодных межвузовских конференциях «Математическое моделирование и краевые задачи» (2002–2003 гг.) в СамГТУ, г. Самара.
— ежегодной международной конференции молодых ученых и студентов «Актуальные проблемы современной науки» (2004-2005 гг.) в СамГТУ, г. Самара;
— ежегодных всероссийских научных конференциях «Математическое моде-

лирование и краевые задачи» (2004–2005 гг.) в СамГТУ, г. Самара.
— на Всероссийской конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» (27 июня–2 июля 2005 г.) в СамГУ, г. Самара;
— научном семинаре кафедры уравнений математической физики Самарского государственного университета в 2003 г. (руководитель д.ф.-м.н., профессор Филатов О.П.);
— научном семинаре кафедры прикладной математики и информатики Самарского государственного технического университета в 2002–2005 гг. (руководитель д.ф.-м.н., профессор Радченко В.П.);
— научном семинаре кафедры математического анализа Белгородского государственного университета в ноябре 2005 г. (руководитель д.ф.-м.н., профессор Солдатов А.П.);

Публикации. Основные результаты диссертации изложены в 12-ти публикациях. Работы [1, 3, 4, 5, 8, 9] написаны в соавторстве с научным руководителем. Из совместных работ в диссертации представлены результаты, полученные автором самостоятельно.

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа изложена на 137 страницах, и состоит из введения, трех глав и списка литературы, включающего 190 наименований.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность темы диссертации, приведен обзор результатов исследований по ее тематике, кратко изложено содержание работы и методика исследований, приведены основные результаты.

В качестве объектов исследования в работе рассмотрены модельные нелокальные дифференциальные уравнения, которые в общем виде можно записать следующим образом:

$$Mu(x, y) + Nu(P(x, y)) = 0,$$

где M и N — некоторые дифференциальные операторы второго порядка, причем N действует на функцию, вычисленную в инволютивной точке $P(x, y)$.

Пусть χ — множество гомеоморфизмов инволютивного типа второго порядка. Если отображение χ задано в виде зависимостей: $x \to \alpha(x, y)$, $y \to \beta(x, y)$, то будем писать: для любой точки $P(x, y) \in \Omega$ отображение $\chi : P(x, y) \xrightarrow{\chi} P'(\alpha, \beta)$, $P'(\alpha, \beta) \in \Omega$.

§1.1 **первой главы** носит вспомогательный характер. Здесь вводится известное понятие инволюции и приводятся необходимые в дальнейшем ее свойства.

В §1.2 для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$x'(t) = p(t)x(t) + q(t)x\left[\alpha(t)\right], \quad t \in [0,1], \tag{1}$$

где $\alpha(t)$ однозначно отображает отрезок $[0,1]$ на себя, а коэффициенты удовлетворяют условию:

$$\frac{p(t)}{p\left(\alpha(t)\right)} = -\frac{q(t)}{q\left(\alpha(t)\right)} = \alpha'(t),$$

рассматриваются левосторонняя $x(0) = x_0$ и правосторонняя $x(1) = x_1$ задачи Коши. Показано влияние слагаемого, содержащего инволютивное отклонение, на равноправие и корректность левосторонней и правосторонней задач Коши, а также на свойства решений этих задач. Результаты сформулированы в виде теоремы:

Теорема 1.1. *Пусть* $A = \int\limits_0^1 q(t)\,dt$. *Тогда:*

1) Если $A = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$ *то однородные левосторонняя и правосторонняя задачи Коши не равноправны в смысле единственности решения — правосторонняя задача имеет единственное тривиальное решение, а левосторонняя задача имеет бесконечное множество нетривиальных решений. В свою очередь, неоднородная левосторонняя задача Коши является некорректной в смысле существования решения, а правосторонняя – корректной.*

2) Если $A = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$ *то ситуация прямо противоположная.*

3) Если $A \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$ *то однородные левосторонняя и правосторонняя задачи Коши равноправны в смысле единственности (имеют единственное тривиальное решение). Неоднородные задачи Коши корректны и имеют колеблющиеся решения.*

В §1.3 рассматривается нелокальное уравнение

$$u_{xy}(x,y) + pu(x,y) + qu(\alpha(x,y), \beta(x,y)) = 0, \tag{2}$$

которое получено из классического телеграфного уравнения добавлением слагаемого с инволютивным отклонением аргументов: $\alpha(x,y) = y, \quad \beta(x,y) = y,$ которое обладает свойством: отклонения по первому аргументу $\alpha(x,y) = x + (y - x)$ и по второму аргументу $\beta(x,y) = y - (y - x)$ имеют разные знаки (опережение при $y > x$ и запаздывание при $y < x$).

В бесконечной области $D = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ для уравнения (2) рассмотрена задача Коши:

Задача Коши. *В области* D *найти решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям*

$$u(x,y) \in C^1(\mathbb{R}^2), \quad u_{xy}(x,y) \in C(\mathbb{R}^2), \tag{3}$$

$$u(x,y)\big|_{y=x} = \tau(x), \quad x \in \mathbb{R},$$
$$\left[\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\right] u(x,y)\big|_{y=x} = \nu(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Решение найдено в явном виде. Также было установлено влияние инволютивного отклонения на асимптотическое поведение полученного решения на бесконечности по сравнению с классическим решением задачи Коши для телеграфного уравнения.

Результаты сформулированы в виде теорем:

Теорема 1.2. *Если* $\tau(x) \in C^1(\mathbb{R})$, $\nu(x) \in C(\mathbb{R})$, *то задача Коши для уравнения (2) корректна.*

Теорема 1.3. *Если* $p > |q|, \tau(x) = O\left(|x|^{-\lambda}\right), \nu(x) = O\left(|x|^{-\gamma}\right), \lambda, \gamma > 0$, *то при* $\sqrt{x^2+y^2} \to \infty$ *решение задачи Коши исчезает, в противном случае экспоненциально возрастает.*

В §1.4 в области $D = \{(x,y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ для уравнения (2) рассмотрены две характеристические задачи G_1 и G_2 с нелокальными условиями:

Задача G_1. *В области* D *найти решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям (3) и*

$$\frac{u(x,1)+u(1,x)}{2} = \varphi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$\frac{u(0,y)-u(y,0)}{2} = \psi(y), \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1,$$
$$\varphi(0) = \psi(1), \tag{4}$$

где φ *и* ψ *— заданные функции.*

Задача G_2. *В области* D *найти решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям (3), (4) и*

$$\frac{u(0,y)+u(y,0)}{2} = \psi(y), \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1,$$
$$\frac{u(x,1)-u(1,x)}{2} = \varphi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

где φ *и* ψ *— заданные функции.*

Решения найдены в явном виде, результаты сформулированы в виде следующих теорем:

Теорема 1.4. *Если* $\varphi(x), \psi(y) \in C^1(0,1) \cap C[0,1]$, $\varphi', \psi' \in L_1[0,1]$, *то задача* G_1 *для уравнения (2) корректна.*

Теорема 1.7. *Если* $\varphi(x), \psi(y) \in C^1(0,1) \cap C[0,1]$, $\varphi', \psi' \in L_1[0,1]$, *то задача* G_2 *для уравнения (2) корректна.*

Во **второй главе** рассматриваются два нелокальных уравнения

$$L_p u(x,y) + \varepsilon L_q u(\alpha(x,y), \beta(x,y)) = 0, \tag{5}$$

где $L_\lambda \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\lambda \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ — дифференциальный оператор, $0 < \varepsilon < 1$, $\alpha(x,y) = y, \quad \beta(x,y) = x, \quad p, q \in \mathbb{R}:$

$$\begin{cases} |p + q\varepsilon| > 1 + \varepsilon, \\ |p - q\varepsilon| > 1 - \varepsilon, \end{cases} \tag{6}$$

и уравнение

$$M_\alpha u(x,y) + M_\beta u(-x,y) = 0, \tag{7}$$

где $M_\lambda u(x,y) \equiv \lambda_1 \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \lambda_2 \dfrac{\partial^2 u(x,-y)}{\partial x^2}$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$.

Уравнения (5) и (7) получены из операторов L_p и M_α соответственно, возмущенных операторами того же семейства, действующих на функции, вычисленных в инволютивных точках. Вообще говоря, в силу (6) операторы L_p и L_q могут быть разных типов, а оператор M_α сам по себе является нелокальным.

Уравнение (7) также можно записать в следующем виде:

$$\alpha_1 \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2 u(x,-y)}{\partial x^2} + \beta_1 \frac{\partial^2 u(-x,y)}{\partial y^2} + \beta_2 \frac{\partial^2 u(-x,-y)}{\partial x^2} = 0,$$

Уравнение (5), вообще говоря, не поддается известной классификации, так как тип уравнения — это его локальное свойство. Для него нет понятия характеристик, и краевые задачи, которые для него рассматриваются, сложно назвать краевыми, так как условия задаются вне области, в которой ищется решение той или иной задачи.

Под квазихарактеристиками уравнения (5) будем понимать прямые

$$y = ax + c, \quad y = \frac{1}{a}x + c, \quad y = bx + c, \quad y = \frac{1}{b}x + c,$$

где

$$a = \frac{p + q\varepsilon}{1 + \varepsilon} + \sqrt{\left(\frac{p + q\varepsilon}{1 + \varepsilon}\right)^2 - 1}, \quad b = \frac{p - q\varepsilon}{1 - \varepsilon} + \sqrt{\left(\frac{p - q\varepsilon}{1 - \varepsilon}\right)^2 - 1}.$$

Для этого уравнения не определено понятие характеристики, но приведенные прямые являются характеристиками системы уравнений, построенной определенным образом.

В §2.1 для уравнения (5) в области $D = \{(x,y) : y + x > 0\}$ рассматривается задача Коши:

Задача Коши. *В области D найти функцию $u(x,y) \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$, удовлетворяющую уравнению (5) и условиям*

$$\lim_{y+x\to+0} u(x,y) = \tau(x) \quad x \in \mathbb{R}, \tag{8}$$

$$\lim_{y+x\to+0} \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \nu(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Решение найдено в явном виде, результат сформулирован в виде теоремы:

Теорема 2.1. *Если $\tau(x) \in C^2(\mathbb{R})$, $\nu(x) \in C^1(\mathbb{R})$, то задача Коши для уравнения (5) корректна.*

В §2.2 для уравнения (5) в области $H_c^b \subset H_c^a$, где $H_c^\gamma = \{\gamma x - c(1+\gamma) < y < \bar{\gamma}x + c(1+\bar{\gamma})\} \cap \{\bar{\gamma}x - c(1+\bar{\gamma}) < y < \gamma x + c(1+\gamma)\}$, $\bar{\gamma} = 1/\gamma, c \in \mathbb{R}$, рассматривается квазихарактеристическая задача Гурса с заданием нелокальных краевых условий на квазихарактеристиках уравнения.

Задача G. *В области $H_c^b \subset H_c^a$ найти функцию $u(x,y) \in C^2\left(H_c^b\right)$, удовлетворяющую в H_c^a уравнению (5) и условиям*

$$\frac{u[\Theta_1^a(x)] + u[\Theta_2^a(x)]}{2} = \varphi(x), \quad x \in [-c,c], \tag{10}$$

$$\frac{u[\Theta_1^b(x)] - u[\Theta_2^b(x)]}{2} = \psi(x), \quad x \in [-c,c], \tag{11}$$

$$\varphi(c) = \psi(c),$$

где $\Theta_1^\gamma(x) = \left(\frac{\gamma x + c}{\gamma - 1}; \frac{x + \gamma c}{\gamma - 1}\right)$, $\Theta_2^\gamma(x) = \left(\frac{x + \gamma c}{\gamma - 1}; \frac{\gamma x + c}{\gamma - 1}\right)$ *— аффиксы точек пересечения квазихарактеристик.*

Решение найдено в явном виде, результат сформулирован в виде теоремы:

Теорема 2.2. *Если $\varphi(x), \psi(x) \in C^2(-c,c)$, то задача G для уравнения (5) корректна.*

В §2.3 и §2.4 для уравнения (5) в треугольной области $D_c^b \subset D_c^a$, где $D_c^\gamma = \{\gamma x - c(1+\gamma) < y < \bar{\gamma}x + c(1+\bar{\gamma}),\, y + x > 0\}$, рассмотрены квазихарактеристические задачи Дарбу DX_1 и DX_2 и Коши-Гурса CG_1 и CG_2 с заданием нелокальных краевых условий на части квазихарактеристик. При $q = 0$ данные задачи являются задачами со смещением.

Задача DX_1. *В области $D_c^b \subset D_c^a$ найти функцию $u(x,y) \in C^2\left(D_c^b\right)$, удовлетворяющую в D_c^a уравнению (5) и условиям (8) при $x \in [-c,c]$, (10), (11) при $x \in \left[-c, -\frac{c}{2}\right]$ и $\varphi(-c) = \psi(-c) = \tau(-c)$.*

Задача DX_2. *В области $D_c^b \subset D_c^a$ найти функцию $u(x,y) \in C^2\left(D_c^b\right)$, удовлетворяющую в D_c^a уравнению (5) и условиям (8) при $x \in [-c,c]$, (10) при $x \in \left[-\frac{c}{2}, 0\right]$, (11) при $x \in \left[-c, -\frac{c}{2}\right]$ и $\psi(-c) = \tau(-c)$.*

Задача CG_1. *В области* $D_c^b \subset D_c^a$ *найти функцию* $u(x,y) \in C^2\left(D_c^b\right)$, *удовлетворяющую в* D_c^a *уравнению (5) и условиям (9) при* $x \in (-c,c)$, *(10), (11) при* $x \in \left[-c,-\frac{c}{2}\right]$ *и* $\varphi(-c)=\psi(-c)$.
Задача CG_2. *В области* $D_c^b \subset D_c^a$ *найти функцию* $u(x,y) \in C^2\left(D_c^b\right)$, *удовлетворяющую в* D_c^a *уравнению (5) и условиям (9) при* $x \in (-c,c)$, *(10) при* $x \in \left[-\frac{c}{2},0\right]$, *(11) при* $x \in \left[-c,-\frac{c}{2}\right]$.

Решения найдены в явном виде, результаты сформулированы в виде теорем:
Теорема 2.3. *При* $\varphi(x),\psi(x) \in C^2\left[-c,-\frac{c}{2}\right]$, $\tau(x) \in C^2(-c,c) \cap C[-c,c]$ *задача* DX_1 *для уравнения (5) корректна.*
Теорема 2.4. *При* $\varphi(x) \in C^2\left[-\frac{c}{2},0\right]$, $\psi(x) \in C^2\left[-c,-\frac{c}{2}\right]$, $\tau(x) \in C^2(-c,c) \cap C[-c,c]$ *задача* DX_1 *для уравнения (5) корректна.*
Теорема 2.5. *При* $\varphi(x),\psi(x) \in C^2\left[-c,-\frac{c}{2}\right]$, $\nu(x) \in C^1(-c,c)$ *задача* CG_1 *для уравнения (5) корректна.*
Теорема 2.6. *При* $\varphi(x) \in C^2\left[-\frac{c}{2},0\right]$, $\psi(x) \in C^2\left[-c,-\frac{c}{2}\right]$, $\nu(x) \in C^1(-c,c)$ *задача* CG_2 *для уравнения (5) корректна.*

В §2.5 в прямоугольной области $H=\{(x,y): x \in (-\pi,\pi), t \in (-T,T)\}$ для уравнения (7) рассмотрена задача Дирихле:
Задача D. *В области* H *найти функцию* $u(x,y) \in C^2(H) \cap C(\overline{H})$, *удовлетворяющую уравнению (7) и условиям:*

$$u(-\pi,y)=u(\pi,y)=0, \quad y \in [-T,T],$$

$$u(x,T)=-u(x,-T)=\varphi(x), \quad x \in [-\pi,\pi].$$

Решение найдено в явном виде, результаты сформулированы в виде лемм и теоремы:
Лемма 2.1. *Система функций* $\sin nx, \cos(k+1/2)x$, $n=1,2,3,\ldots$, $k=0,1,2,\ldots$, *ортогональна и полна в* $L_2[-\pi,\pi]$.
Лемма 2.3. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[-\pi,\pi]$, *имеет на этом отрезке кусочно-непрерывную производную и удовлетворяет условию* $f(-\pi)=f(\pi)=0$, *то тригонометрический ряд по системе функций* $\sin nx$, $\cos(k+1/2)x$, $n=1,2,3,\ldots$, $k=0,1,2,\ldots$ *функции* $f(x)$ *сходится абсолютно на* $[-\pi,\pi]$.
Теорема 2.7. *Если* $\varphi(x) \in [-\pi,\pi]$, *то задача* D *для уравнения (7) корректна.*

Третья глава посвящена краевым задачам в симметричных бесконечных областях для нелокальных дифференциальных уравнений с оператором типа Лавретьева-Бицадзе.

В §3.1 для уравнения

$$u_{xx}(x,y)+sgn(xy)u_{yy}(x,y)+\varepsilon u_{yy}(y,x)=0, \tag{12}$$

$0 < \varepsilon < 1$, в области $H^a \subset H^b$, где $H^\gamma = \{(x,y) : y+\gamma x > 0, \gamma y + x > 0\}$, $a = \sqrt{1+\varepsilon}$, $b = \sqrt{1-\varepsilon}$, рассмотрена краевая задача T_1 с нелокальными условиями на квазихарактеристиках

Задача T_1. *В области* $H^a \subset H^b$ *найти ограниченную при* $\sqrt{x^2+y^2} \to \infty$, *функцию* $u(x,y) \in C^1\left(H^b\right) \cap C\left(\overline{H}^b\right)$ *(допускается, что в начале координат производные* u_x *и* u_y *могут иметь логарифмическую особенность), удовлетворяющую в* H^a *уравнению (12) при* $x \neq 0$, $y \neq 0$ *и условиям*

$$\frac{u(-x,ax)+u(ax,-x)}{2} = \varphi(x), \quad x > 0,$$

$$\frac{u(-x,bx)-u(bx,-x)}{2} = \psi(x). \quad x > 0.$$

Решение найдено в явном виде, результаты сформулированы в виде теоремы:

Теорема 3.1. *Если* $\varphi'(t), \psi'(t) \in C^{(1,\delta)}(0,+\infty)$, *причем при* $t \to \infty$ $\varphi'(t) = O\left(t^{-\lambda}\right)$, $\psi'(t) = O\left(t^{-\gamma}\right)$, $\lambda > 1$, $\gamma > 1$, $\delta > 0$, *то задача* T_1 *для уравнения (12) корректна.*

В §3.2 для уравнения

$$u_{xx}(x,y) + sgn(y\pi - y^2)u_{yy}(x,y) + \varepsilon u_{yy}(-x,y) = 0, \tag{13}$$

$0 < \varepsilon < 1$, на всей плоскости рассмотрена краевая задача T_2 с нелокальными условиями на квазихарактеристиках:

Задача T_2. *Найти функцию* $u(x,y) \in C^2\left(\mathbb{R}^2\right)$, *исчезающую на бесконечности, обладающую частными производными первого порядка, непрерывными вплоть до* $y = 0$, $y = \pi$, *за исключением, быть может, точек* $(0,0)$, $(0,\pi)$, *удовлетворяющую уравнению (13) и условиям при* $x \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$:

$$\frac{u\left(ax,-x\right)+u\left(-ax,-x\right)}{2} = \varphi_1(x),$$

$$\frac{u\left(ax,x+\pi\right)+u\left(-ax,x+\pi\right)}{2} = \varphi_2(x),$$

$$\frac{u\left(bx,-x\right)+u\left(-bx,-x\right)}{2} = \psi_1(x),$$

$$\frac{u\left(bx,x+\pi\right)+u\left(-bx,x+\pi\right)}{2} = \psi_2(x).$$

Решение найдено в явном виде, результаты сформулированы в виде теоремы:

Теорема 3.2. *Если* $\varphi_k'(x), \psi_k'(x) \in C^{(1,\delta)}(-\infty, +\infty)$, *причем при* $|x| \to \infty$ $\varphi_k'(x) = O\left(e^{-\lambda|x|}\right)$, $\psi_k'(x) = O\left(e^{-\lambda|x|}\right)$, $\lambda > 1$, $\delta > 0$, $k = 1, 2$, *то задача* T_2 *для уравнения (13) корректна.*

В §3.3 для уравнения

$$u_{xx}(x,y) + sgn\, y u_{yy}(x,y) + \varepsilon u_{yy}(2\pi - x, y) = 0, \tag{14}$$

$0 < \varepsilon < 1$, в области $Q^a \subset Q^b$, где $Q^\lambda = \{(x,y) : y > \lambda x, y > \pi -, y < 0 \lambda x\} \cup \{(x,y) : 0 < x < \pi, y > 0\}$, рассмотрена краевая задача T_3 с нелокальными условиями на квазихарактеристиках:

Задача T_3. *В области* $Q^a \subset Q^b$ *найти функцию* $u(x,y) \in C^1(Q^a) \cap C(\overline{Q}^a)$, *исчезающую при* $y \to \infty$, *удовлетворяющую в* Q^b *уравнению (14) при* $y \neq 0$ *и условиям:*

$$u(0,y) = u(\pi,y) = \varphi(y), \quad 0 < y < \infty,$$

$$\frac{u\,(ax, -x) + u\,(\pi - ax, x)}{2} = \psi_1(x),$$

$$\frac{u\,(bx, -x) - u\,(\pi - bx, x)}{2} = \psi_2(x),$$

$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение найдено в явном виде, результаты сформулированы в виде теоремы:

Теорема 3.3. *Если* $\varphi(y) \in C(0,\infty)$, *причем при* $y \to \infty$ $\varphi(y) = O\left(y^{-\lambda}\right)$, $\lambda > 0$, $\psi_1(x), \psi_2(x) \in C^{(1,\delta)}\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, *то задача* T_3 *для уравнения (14) корректна.*

Публикации по теме диссертации

1. *Саушкин И.Н., Андреев А.А.* Видоизмененная задача Гурса для телеграфного уравнения с инволютивным сдвигом // Труды международной конференции «Математическое моделирование, статистика и информатика в современном управлении экономикой». Самара, 2001. С. 202–204.
2. *Саушкин И.Н.* О влиянии инволютивного сдвига на асимптотические свойства решения задачи Коши // Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. Т.11. Проблемы современной математики. Казань, 2001. С. 240–241.
3. *Саушкин И.Н., Андреев А.А.* Асимптотика решения задачи Коши для одного нелокального уравнения // Вторая международная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». Тезисы докл. Нальчик, 2001. С. 54–55.

4. *Саушкин И.Н., Андреев А.А.* Аналог задачи Гурса для одного дифференциального уравнения специального вида с инволютивным отклонением // Материалы международного Российско-Узбекского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики» и школы молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики». Нальчик-Эльбрус, 2003. С. 21–22.
5. *Саушкин И.Н., Андреев А.А.* Задача Коши для одного дифференциального уравнения специального вида с инволютивным отклонением // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды тринадцатой межвуз. конф. Самара: СамГТУ, 2003. С. 144–147.
6. *Саушкин И.Н.* О задаче Коши для одного дифференциального уравнения с инволютивным отклонением // Актуальные проблемы современной науки. Труды 4-й Международной конференции молодых ученых и студентов. Естественные науки. Ч. 1–3: Математика. Механика. Машиностроение. Самара: СамГТУ, 2003. С. 62–64.
7. *Саушкин И.Н.* Аналог задачи Дарбу для одного дифференциального уравнения специального вида с инволютивным отклонением // Обозрение прикладной и промышленной математики. Т. 10. Вып. 2. Четвертый Всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной математике. Тезисы докладов. Москва: ОПиПМ, 2003. С. 423.
8. *Саушкин И.Н., Андреев А.А.* Аналог задачи Трикоми для возмущенного уравнения Лаврентьева-Бицадзе // Материалы международного Российско-Казахского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики» и школы молодых ученых «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики». Нальчик-Эльбрус, 2004. С. 21–22.
9. *Саушкин И.Н., Андреев А.А.* Об аналоге задачи Трикоми для одного модельного уравнения с инволютивным отклонением в бесконечной области // Вестн. Самар. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. Вып. 34. 2005. С. 10–16.
10. *Саушкин И.Н.* Об одной краевой задаче для уравнения с инволютивным отклонением в бесконечной области // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды Второй Всероссийской конференции. Ч. 3. Самара: СамГТУ, 2005. С. 199–204.
11. *Саушкин И.Н.* Аналог задачи Трикоми для уравнения, порожденного оператором Лаврентьева-Бицадзе, содержащего инволютивный сдвиг // Обозрение прикладной и промышленной математики. Т.12. Вып.2. Шестой Всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной математике. Тезисы докладов. Москва: ОПиПМ, 2005. С. 503.
12. *Саушкин И.Н.* Об одном аналоге задачи Коши для одного дифференциального уравнения с инволютивным отклонением // Обозрение прикладной и промышленной математики. Т.12. Вып.3. Шестой Всероссийский

симпозиум по прикладной и промышленной математике. Тезисы докладов. Москва: ОПиПМ, 2005. С. 768–769.

Заказ №???. Тираж 100 экз. Отпечатано на ризографе.
Самарский государственный технический университет.
Отдел типографии и оперативной полиграфии.
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Министерства образования и науки РФ и Правительства Самарской области для студентов, аспирантов и молодых ученых Самарской области в 2005 году (проект 270Е2.1К).