

Шапиевский Дмитрий Владимирович

**РАЗРАБОТКА СТРУКТУРНО-ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИХ
МОДЕЛЕЙ МИКРОНЕОДНОРОДНЫХ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ
МАТЕРИАЛОВ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ**

01.02.04 — Механика деформируемого твердого тела

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Работа выполнена в Самарском государственном техническом университете.

Научный руководитель:

доктор физико–математических наук, профессор Радченко Владимир Павлович.

Официальные оппоненты:

доктор технических наук, профессор Клебанов Яков Мордухович, заведующий кафедрой «Механика» Самарского государственного технического университета,

доктор физико-математических наук, профессор Никитенко Анатолий Федорович, ведущий научный сотрудник института гидродинамики СО РАН

Ведущая организация:

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Защита состоится «14» ноября 2007 г. в 9⁰⁰ часов на заседании диссертационного совета Д 212.218.06 при Самарском государственном университете по адресу: 443011, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1, зал заседаний.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Самарского государственного университета.

Автореферат разослан «_____» октября 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Глушеников В.С.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Существующие на сегодняшний день теории ползучести разработаны для конструкционных и природных материалов, обладающих свойствами линейной упругости. При этом общая деформация является аддитивной составляющей упругой и неупругой деформаций, и для каждой из компонент записываются свои физические уравнения состояния.

Однако ряд материалов (резиноподобные материалы, природные биокomпозитные ткани, конструкционные микронеоднородные среды и другие) обладают нелинейно-упругими свойствами, поведение которых в области ползучести существенно отличается от поведения известных конструкционных материалов. В частности, для природных биокomпозитных материалов наблюдается влияние деформации ползучести на мгновенно-упругую деформацию. Описание такого рода эффекта (и некоторых других) на феноменологическом уровне является крайне сложной задачей и требует большого объема экспериментальных исследований. Рациональное объяснение многим реологическим эффектам можно дать только анализируя напряженно-деформированное состояние материалов на микроуровне, поскольку причиной многих сложных явлений является эволюция структурных микродеформаций и соответствующих им структурных микронапряжений в материале под действием внешних нагрузок.

Исследование структурных моделей материала позволяет выявить на качественном уровне некоторые его свойства, которые далее полагаются в основу построения определяющих соотношений, предназначенных для решения краевых задач и анализа напряженно-деформированного состояния.

Вышеизложенное определяет актуальность диссертационного исследования и позволяет сформулировать цель настоящей работы.

Целью работы является разработка структурно-феноменологической модели нелинейно-упругого материала в условиях ползучести, исследование на ее основе сложных эффектов влияния ползучести на упругую деформацию и применение модели к решению одномерных краевых задач для элементов конструкций (включая конструкции из природного биокomпозитного материала — костной ткани).

Научная новизна работы заключается в следующем:

1) доказано, что кривые ползучести по структурной модели (типа обобщенной модели Максвелла с нелинейно-вязкими элементами) при нагрузке могут иметь разный характер «выпуклости-вогнутости» (включая точки перегиба), а кривые обратной ползучести после полной разгрузки имеют немонотонный характер при нелинейных законах вязкого течения элементов модели и монотонно убывающий — при линейных законах;

2) разработана структурная модель микронеоднородных сред, описывающая влияние деформации ползучести на величину упругой деформации, и показано, что этот эффект возможен лишь для физически нелинейно-упругого материала;

3) показано, что вследствие ползучести мгновенная нелинейно-упругая деформация проявляет одновременно свойства механической памяти, поскольку в процессе ползучести при разгрузке образца происходит полное восстановление первоначальных упругих свойств, а также вязкоупругости, так как мгновенно-упругая

деформация явно зависит от времени;

4) установлено, что при деформации образца из нелинейно-упругого материала в режиме ползучести с выдержками при постоянных напряжениях наблюдаются специфические «гистерезисные» петли на диаграмме упругого деформирования;

5) предложен феноменологический вариант кинетических уравнений ползучести, описывающий эффект влияния реологической деформации на мгновенно-упругую деформацию;

6) решен ряд прикладных задач на основании структурной модели для элементов конструкций из нелинейно-упругого материала в условиях ползучести (в том числе, для большеберцовой кости человека при естественных физиологических нагрузках).

Практическая значимость работы заключается в разработке структурной и феноменологической моделей ползучести нелинейно-упругих материалов, позволяющих описать ряд новых реологических эффектов (влияние ползучести на упругую деформацию, свойство механической памяти и вязкоупругости для мгновенно-упругой деформации, «гистерезисные» явления для нелинейно-упругой деформации вследствие ползучести и другие), что является важным вкладом в дальнейшее развитие теории ползучести. С другой стороны, разработанные на их основе методы решения одномерных краевых задач для биокomпозитных материалов (костной ткани) имеют прикладное значение, поскольку могут быть полезны при разработке новых перспективных конструкционных материалов в медицине.

Обоснованность выносимых на защиту научных положений, выводов и рекомендаций, а также достоверность полученных результатов исследований подтверждается: адекватностью имеющихся модельных математических представлений реальному физико-механическому поведению исследуемых материалов; корректностью использования математического аппарата и законов механики деформируемого твердого тела; сопоставлением расчетных данных по предложенным моделям и методам с известными экспериментальными данными.

На защиту выносятся:

1) структурная и феноменологическая модели ползучести микронеоднородных нелинейно-упругих сред и доказательство на их основе влияния деформации ползучести на упругую деформацию;

2) математические модели и алгоритмы для описания новых эффектов: влияния ползучести на упругую деформацию, свойство механической памяти и вязкоупругости для нелинейной упругой деформации вследствие ползучести, «гистерезисные» формы диаграмм упругого деформирования при ползучести с выдержками при постоянных напряжениях, немонотонный характер кривых обратной ползучести для обобщенной нелинейной модели типа Максвелла;

3) решение ряда новых прикладных задач на основании разработанных структурных моделей для элементов конструкций из нелинейно-упругих материалов в условиях ползучести (в том числе, для большеберцовой кости человека при естественных физиологических нагрузках);

4) качественные и количественные результаты, полученные при математиче-

ском моделировании кинетики напряженно-деформированного состояния материалов и элементов конструкций из нелинейно-упругого материала.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка источников из 201 наименования. Работа содержит 178 страниц основного текста.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на Второй Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи» (г. Самара, 2005), на Четвертой Всероссийской конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (г. Самара, 2007), на Четвертом Всероссийском научном семинаре памяти С.Д. Волкова «Механика микронеоднородных материалов и разрушение» (г. Екатеринбург, 2006), на Всероссийской конференции «Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций» (г. Новосибирск, 2006), на Всероссийской научной конференции «Математика. Механика. Информатика» (г. Челябинск, 2006), на Международной молодежной научной конференции «XXXIII Гагаринские чтения» (г. Москва, 2007), на Международной конференции «XVIII сессия Международной школы по моделям механики сплошных сред» (г. Саратов, 2007), на научном семинаре «Механика и прикладная математика» Самарского государственного технического университета (рук. профессор В.П. Радченко, 2005, 2006, 2007 г.г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 11 работ, список которых приведен в конце автореферата.

Работа выполнялась в рамках тематического плана НИР СамГТУ (тема «Разработка методов математического моделирования динамики и деградации процессов в механике сплошных сред, технических, экономических, биологических и социальных системах и методов решения неклассических краевых задач и их приложений»).

Благодарности. Автор выражает благодарность научному руководителю профессору, доктору физико-математических наук В.П. Радченко за постановки задач и постоянное внимание к работе.

Личный вклад автора. Автору во всех работах, опубликованных в соавторстве, в равной степени принадлежат как постановки задач, так и результаты выполненных исследований.

Краткое содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, определяются цели исследования, излагаются научная новизна и практическая значимость работы, формулируются основные положения, выносимые на защиту, приводится структура диссертационной работы, а также сведения об апробации работы и публикациях.

Глава 1. Аналитический обзор и постановка задачи.

В главе 1 дан краткий обзор литературы по научным проблемам, близким к теме диссертационной работы.

Анализируются основные подходы при построении физических определяющих соотношений неупругого реологического деформирования на макро- и микроуровне. Отмечается, что существующие на сегодняшний день теории ползучести в основном разработаны для конструкционных и природных материалов, обладающих свойством линейной упругости, при этом используется принцип аддитивности упругой и неупругой деформаций. Однако ряд материалов (резиноподобные материалы, природные биокompозитные ткани, композитные материалы) обладают нелинейно-упругими свойствами, поведение которых в области ползучести существенно отличается от конструкционных и природных промышленных материалов. Анализ ряда работ, в которых экспериментально изучалось поведение природного биокompозитного материала (костной ткани) в условиях длительного нагружения, позволил обнаружить эффект влияния ползучести на мгновенно-упругую деформацию. Отмечено, что систематические исследования ползучести нелинейно-упругих материалов вообще и, в частности, описывающих эффект влияния ползучести на упругую деформацию, в научной литературе отсутствуют. Хотя на возможность дрейфа упругой деформации вследствие ползучести указывалось в работах Ю.П. Самарина и В.П. Радченко. Рациональное объяснение этого эффекта (как и многих других реологических эффектов) можно дать, только анализируя напряженно-деформированное состояние материалов на микроуровне, поскольку причиной многих сложных явлений является эволюция структурных микродеформаций и соответствующих им структурных микронапряжений в материале под действием внешних нагрузок.

Действительно, с позиций континуальной механики материал представляет собой единое целое, в то же время это очень сложная статически неопределимая система случайно ориентированных кристаллических зерен и тех частиц (атомов, молекул и т.д.), из которых они состоят. И именно так рассматривается материал на микроскопическом (механика микронеоднородных сред, металловедение) уровне. На этом уровне проанализированы физические модели пластичности и ползучести, предложенные А.А. Аршакуни, С.Б. Башдорфом, Б.В. Будянским, В.С. Ивановой, Ларсоном, С.П. Мельниковым, А.М. Мерцером, В.М. Розенбергом, А.А. Смирновым, Стораккерсом, Хартом, С.А. Шестериковым, М.Ф. Askby, A.S. Argon, F.W. Crossman, S. Takenchi и другими. Отмечено, что такие модели в параметрах состояния сложны и практически не пригодны для расчетов на феноменологическом уровне. С этой точки зрения более приемлемы структурные математические модели среды, учитывающие неравномерность развития необратимых деформаций и представляющие совокупность некоторых гипотетических элементов. Основные принципы построения таких математических моделей даны в работах В.Э. Вильдемана, С.Д. Волкова, Д.А. Гохфельда, В.С. Зарубина, Ю.И. Кадашевича, В.Ю. Марины, В.В. Новожилова, П.А. Павлова, В.П. Радченко, К.Н. Русинко, Ю.П. Самарина, Ю.В. Соколкина, В.В. Стружанова, А.А. Ташикина, Ю.Н. Шевченко, G. Masing и других. С одной стороны, исследование структурных моделей материала позволяет выявить на качественном уровне некоторые его свойства, которые далее полагаются в основу построения определяющих (физических) соотношений, предназначенных для решения краевых задач. С дру-

гой стороны, структурные модели имеют самостоятельное значение и при решении краевых задач. Действительно, феноменологические теории неупругого реологического деформирования со сложными свойствами среды содержат большое число параметров (до двадцати и более) и при их идентификации возникают серьезные трудности экспериментального и математического характера. Это, в свою очередь, привело к активному развитию методов решения краевых задач неупругого деформирования, в которых вместо физических определяющих уравнений механики сплошных сред используются структурные модели, содержащие 5–6 параметров для описания деформаций упругости, пластичности, ползучести и процессов разрушения материалов. При таком подходе структурные модели естественным образом описывают ряд тонких эффектов для материалов и элементов конструкций, которые с феноменологических позиций описать единой теорией крайне сложно. И здесь возникают самостоятельные задачи детального математического исследования и анализа внутренних свойств структурных моделей с нелинейно-упругими и нелинейными вязкими элементами: их поведение при нагрузке и разгрузке, характера кривых ползучести, возможности использования принципа аддитивности упругой и неупругой деформаций и т.д. Такой анализ необходим для построения теории ползучести для нелинейно-упругих материалов. Отмечается, что существующие на сегодняшний день теории неупругого реологического деформирования, предложенные в работах В.И. Астафьева, А.Н. Бадаева, В.В. Болотина, Б.В. Горева, Ю.И. Кадашевича, Л.М. Качанова, Я.М. Клебанова, В.И. Ковпака, В.Л. Колмогорова, Г.Ф. Лепина, А.Ф. Никитенко, В.В. Новожилова, А.М. Локощенко, Н.Н. Малинина, Ю.Н. Работнова, В.П. Радченко, Ю.П. Самарина, О.В. Соснина, С.А. Шестерикова, И.Ю. Цвелодуба, J.A. Betten, J.T. Boyle, F.A. Leckie, J. Spence и многих других авторов, разработаны для линейно-упругих материалов. С целью поиска подходов для их обобщения проанализированы основные направления построения физически нелинейных теорий упругости (В.В. Новожилов, А.И. Лурье, Ю.Н. Радаев, А.А. Роговой, К.Ф. Черных, G.A. Mangin, P.J. Olver и другие).

По результатам литературных данных сформулированы основные задачи диссертационной работы.

Глава 2. Анализ нелинейной обобщенной модели Максвелла.

В главе 2 выполнен детальный математический анализ внутренних свойств обобщенной двузвенной нелинейной модели Максвелла, локальные элементы которой наделены свойствами линейной упругости и нелинейной вязкости (рис. 1), а полная система уравнений имеет вид

$$\varepsilon_i = e_i + p_i, \quad e_i = \frac{\sigma_i}{E_i}, \quad \dot{p}_i = \Psi_i(\sigma_i), \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

$$\alpha \sigma_1(t) + (1 - \alpha) \sigma_2(t) = \sigma(t), \quad (2)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t), \quad (3)$$

где ε_i , e_i и p_i — полная, упругая деформации и деформация вязкого течения, E_i — модуль упругости, σ_i — напряжение, $\Psi_i(\cdot)$ — нелинейная (нечетная) функция вязкого течения для каждого локального элемента; $\sigma(t)$, $\varepsilon(t)$ — макронапряжение и макродеформация, α — «вес» первого локального элемента ($\alpha \in]0, 1[$).

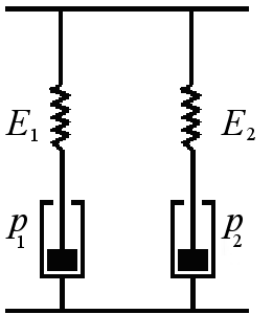


Рис. 1. Схема двух-элементной обобщенной модели Максвелла.

В пункте 2.1 сформулирована постановка задачи главы 2.

В пункте 2.2 выполнен детальный математический анализ кривых ползучести на основе обобщенной модели (1)–(3) при нагрузке и разгрузке. Показано, что при линейных законах вязкого течения $\Psi_i(\sigma) = a_i\sigma$ ($i = 1, 2$) кривые ползучести имеют стандартный вид: при нагрузке — первую (за счет перераспределения микронапряжений) и вторую стадии, а при разгрузке наблюдается асимптотически монотонно-убывающая зависимость $\varepsilon = \varepsilon(t)$. Если же законы вязкого течения нелинейные ($\Psi_i(\sigma) = a_i\sigma|\sigma|^{n_i-1}$ ($i = 1, 2$)), то спектр кривых ползучести при нагрузке более сложный и исчерпывается случаями, представленными на рис. 2, а при разгрузке при $t = t^*$ кривые обратной ползучести вообще являются немонотонными и в зависимости от параметров E_i, a_i, n_i ($i = 1, 2$) имеют вид, представленный на рис. 3.

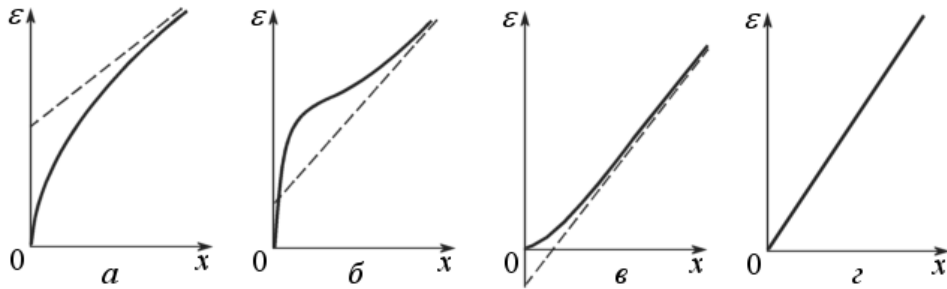


Рис. 2. Спектр кривых ползучести по обобщенной модели Максвелла при нагрузке.

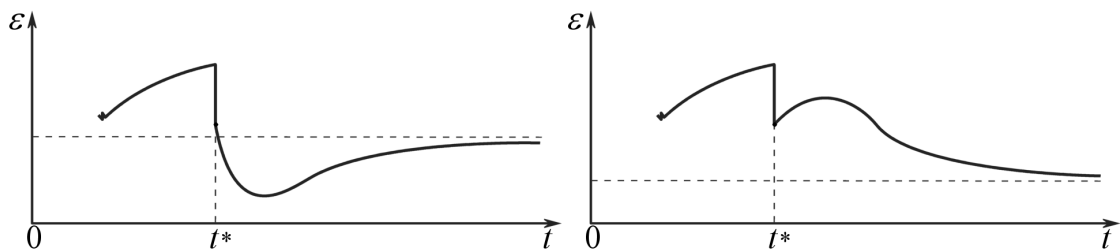


Рис. 3. Спектр кривых обратной ползучести по обобщенной модели Максвелла.

В пункте 2.3 исследована обратимость деформации неустановившегося течения по структурной модели Максвелла при разгрузке и были доказаны две теоремы, суть которых состоит в следующем: если элементы обобщенной модели (1)–(3) удовлетворяют законам линейной вязкости, то деформация неустановившегося течения обобщенной модели полностью обратима, если же хотя бы один элемент модели (1)–(3) подчиняется нелинейному закону вязкого течения, то деформация неустановившегося течения, вообще говоря, обратима не полностью.

В пункте 2.4 выполнен численный анализ модели (1)–(3) и показано, что множество кривых ползучести при нагрузке (рис. 2) и разгрузке (рис. 3) не является пустым при соответствующих значениях параметров E_i, a_i, n_i ($i = 1, 2$).

В пункте 2.5 выполнен анализ немонотонного характера кривых обратной ползучести для модельных материалов и показано, что аналогичный эффект экспериментально наблюдается у стареющих материалов (например, бетона). Теоретически установлено, что эффекты немонотонного характера кривых обратной ползучести для стабильных (нестареющих) материалов, описываемых моделью (1)–(3), имеют определенную частичную аналогию для стареющих материалов, удовлетворяющих обобщенной линейной модели Максвелла (с линейными законами упругости и вязкости) с параметрами E_i и a_i , зависящими от времени.

Глава 3. Математические модели ползучести нелинейно-упругого материала.

Глава 3 посвящена разработке структурных и феноменологических моделей нелинейно-упругих сред в условиях ползучести и анализу кинетики напряженно-деформированного состояния такого рода материалов.

В пункте 3.1 сформулированы постановки задач данной главы.

В пункте 3.2 выполнен анализ общих закономерностей напряженно-деформированного состояния нелинейно-упругих реономных сред на основе структурной модели материала. Для этого сплошная микронеоднородная среда моделируется структурной моделью, представляющей совокупность гипотетических локальных элементов. Уравнения состояния каждого i -го элемента описываются кинетическими уравнениями вида

$$\begin{aligned} y^i(t) &= \varphi^i(\eta^i(t), x^i(t)), \quad \varphi^i(0, 0) = 0; \\ \dot{\eta}^i(t) &= f^i(\eta^i(t), x^i(t)), \quad \eta^i(0) = 0; \quad i = 1, 2, \dots, l. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $x^i(t) = (x_1^i(t), x_2^i(t), \dots, x_{m_i}^i(t))$ — вектор-функция нагрузок на локальный элемент. Координатами вектора $x^i(t)$ в зависимости от математической природы локальных элементов могут быть микронапряжения $\sigma_{\eta\omega}^i$, приложенные усилия, значения температуры и т.п. Вектор $y^i(t) = (y_1^i(t), y_2^i(t), \dots, y_{n_i}^i(t))$ — вектор-функция, описывающая деформационные свойства локального элемента (микродеформации, микроперемещения и т.д.); $\eta^i(t) = (\eta_1^i(t), \eta_2^i(t), \dots, \eta_{s_i}^i(t))$ — вектор-функция состояния локального элемента, при помощи которой фиксируется предыстория процесса деформирования локального элемента; f^i и φ^i — вектор-функции $m_i + s_i$ переменных с s_i и n_i координатами соответственно.

Введём вектор нагрузок $q = (q_1, q_2, \dots, q_m)$, приложенный к материальной точке макросреды (микронапряжения, усилия, моменты и т.д.). Поскольку локальные элементы структурной модели представляют аналог статически неопределимой системы и взаимодействуют друг с другом, то к уравнениям состояния (4) необходимо добавить k_1 уравнений равновесия и k_2 уравнений совместности деформаций локальных элементов:

$$F_{i_1}^1(x^1, \dots, x^l, q_1, \dots, q_m) = 0, \quad i_1 = 1, 2, \dots, k_1; \quad (5)$$

$$F_{j_1}^2(y^1, \dots, y^l) = 0, \quad j_1 = 1, 2, \dots, k_2, \quad (6)$$

где $k_1 + k_2 = \sum_{i=1}^l m_i = m_0$. Система уравнений (4)–(6) описывает некоторую математическую структурную модель материала, при этом m_0 — число внутренних,

а m — внешних степеней свободы модели. Равенства (5), (6) отражают структуру математической модели, а уравнения (4) — свойства её отдельных локальных элементов.

Для описания макродеформационных характеристик среды в материальной точке (объёме) вводится в рассмотрение вектор $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$, координатами которого могут быть макродеформации, макроперемещения и т. д. Очевидно, что по аналогии со статически неопределимыми системами должна существовать функциональная зависимость, связывающая микро- и макродеформированные состояния:

$$Y_i = \Psi_i(y^1, y^2, \dots, y^l), \quad (7)$$

$$\Psi_i(0, 0, \dots, 0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

где Ψ_i — вектор-функция с m_0 координатами. В механике деформируемого твёрдого тела для построения соотношений (7) используют различные гипотезы, в частности, гипотезу однородности деформаций по объёму, различные методы осреднения микродеформаций и т. д.

Доказан ряд утверждений для структурной модели (4)–(7), основой результат которых состоит в том, что мгновенно-изменяемые (упругие) координаты вектора Y могут зависеть от реологических координат вектора состояний η . Это обуславливает дрейф мгновенно-изменяемых координат за счет реологических координат.

В пункте 3.3 детализируются условия, приводящие к эффекту зависимости мгновенно-упругой деформации от реологической деформации, в условиях одноосной ползучести материала. Рассмотрен частный случай структурной модели типа (1)–(3), в которой введены нелинейно-упругие и нелинейно-вязкие элементы, т. е. вместо уравнения (1) используются соотношения

$$\varepsilon_i = e_i + p_i, \quad e_i = \varphi_i(\sigma_i), \quad \dot{p}_i = \psi_i(\sigma_i), \quad (i = 1, 2). \quad (8)$$

Доказан ряд теорем для структурной модели (2), (3), (8), суть которых сводится к утверждению: если локальные элементы структурной модели (2), (3), (8) (и материал в целом) следуют линейным законам упругости, то при любых законах ползучести локальных элементов (и материала) упругая деформация не зависит от деформации ползучести; если же хотя бы один элемент структурной модели следует нелинейному закону упругости, то величина упругой деформации материала зависит от накопленной деформации ползучести.

В пункте 3.4 выполнена расчетно-экспериментальная проверка адекватности структурной модели (2), (3), (8) на примере ползучести природного биокompозитного материала (костной ткани), состоящим в основном из двух компонентов — минеральных веществ и органической матрицы, с ярко выраженными реологическими свойствами. Для этого материала экспериментально установлено^{1,2}, что мгновенно-упругая деформация этого материала при нагрузке e^H при

¹Мелнис А.Э., Лайзан Я.Б. Нелинейная ползучесть компактной костной ткани человека при растяжении // Механика полимеров. 1978. Т. 14. №1. С. 97–100.

²Кнетс И.В., Вилкс Ю.К. Ползучесть компактной костной ткани человека при растяжении // Механика полимеров. 1975. Т. 11. №4. С. 634–638.

$t = 0 + 0$ и полной разгрузке e^P после ползучести при действии постоянного напряжения существенно отличаются друг от друга, причём может выполняться как соотношение $e^P > e^H$, так и $e^P < e^H$, т.е. наблюдается эффект влияния деформации ползучести на мгновенно-упругую деформацию, при этом материал костной ткани является нелинейно упругим.

Для дальнейшего теоретического анализа модели (2), (3), (8) соотношения (8) детализированы в виде

$$\varepsilon_i = e_i + p_i, \quad e_i = \frac{\sigma_i |\sigma_i|^{n_i-1}}{E_i}, \quad \dot{p}_i = a_i \sigma_i |\sigma_i|^{m_i-1}, \quad (i = 1, 2), \quad (9)$$

где n_i, m_i, a_i, E_i — параметры, для которых разработана методика идентификации по экспериментальным данным.

Основной полученный результат содержит следующая теорема.

Теорема. Пусть структурная модель задана соотношениями (2), (3), (9). Тогда, если $n_1 = 1$ и $p_1^* < p_2^*$, то при $n_2 > 1$ для мгновенно-упругой деформации образца при нагрузке e^H и разгрузке после ползучести e^P выполняется неравенство $e^H > e^P$; при $0 < n_2 < 1$ — $e^H < e^P$, а при $n_2 = 1$ имеем $e^H = e^P$, где $p_i^* = p_i(t^*)$ ($i = 1, 2$) — величины деформации ползучести в локальных элементах модели, накопленные к моменту разгрузки при $t = t^*$.

На рис. 4 и 5 и в таблице приведены результаты экспериментальной проверки модели (2), (3), (9) по ползучести костной ткани. Наблюдается удовлетворительное соответствие расчетных и опытных данных.

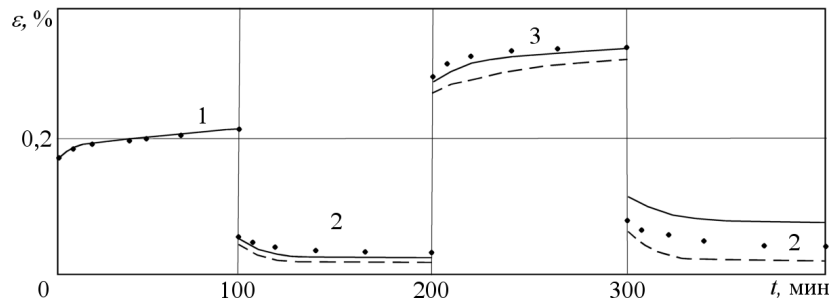


Рис. 4. Изменение деформации костной ткани во времени: точки — экспериментальные данные; сплошная линия — расчет по феноменологической модели (10); штриховая линия — расчет по структурной модели (2), (3), (9). Цифры: 1 — $\sigma_0 = 35,71$; 2 — $\sigma_0 = 0$; 3 — $\sigma_0 = 53,56$ МПа.

σ_0 , МПа	e^H , %			e^P , %		
	экспери- мент	расчет		экспери- мент	расчет	
		структур. модель	феноменол. модель		структур. модель	феноменол. модель
35,71	0,178	0,178	0,178	0,152	0,162	0,162
53,56	0,255	0,250	0,254	0,245	0,236	0,217
74,56	0,470	0,445	0,445	0,670	0,642	0,670
90,41	0,570	0,570	0,570	—	—	—

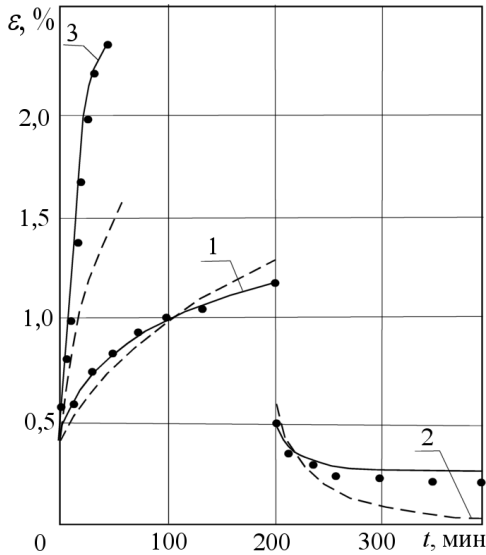


Рис. 5. Изменение деформации костной ткани во времени: точки — экспериментальные данные; сплошная линия — расчет по феноменологической модели (10); штриховая линия — расчёт по структурной модели. Цифры: 1 — $\sigma_0 = 74,56$; 2 — $\sigma_0 = 0$; 3 — $\sigma_0 = 90,41$ МПа.

В пункте 3.5 выполнен анализ эффекта дрейфа мгновенно-упругой деформации вследствие ползучести и выполнена классификация материалов по этому эффекту.

Выполненный детальный численный анализ модели (2), (3), (9) позволяет сформулировать следующие выводы:

1) мгновенно-упругая деформация проявляет одновременно свойства механической памяти, поскольку в процессе ползучести при разгрузке образца (при $t \rightarrow \infty$) происходит полное восстановление первоначальных упругих свойств, а также вязкоупругости, поскольку мгновенно-упругая деформация явно зависит от времени;

2) при деформировании образца в режиме ползучести с выдержками при постоянных напряжениях $\sigma = \sigma_0$ (с последующей разгрузкой) наблюдается специфический геометрический «гистерезис» на диаграмме упругого деформирования; весь спектр диаграмм расположен между двумя асимптотическими состояниями: диаграммой $\epsilon - \sigma_0$ при $t = 0$ и диаграммой, соответствующей асимптотическому состоянию структурной модели под нагрузкой при $t \rightarrow \infty$.

Типичные диаграммы упругого деформирования в зависимости от параметров структурной модели схематически приведены на рис. 6.

Следующим этапом работы является поиск ответов на вопросы: какое место занимают полученные результаты для микронеоднородных нелинейно-упругих материалов в условия ползучести в системе знаний механики деформируемого твердого тела? Существуют ли другие реальные материалы с похожими (хотя бы чисто формально) свойствами упругих диаграмм?

С этой точки зрения определенный интерес вызывают материалы с эффектом памяти механической формы, вызванной обратимыми фазовыми превращениями в металле. Проанализирован большой объем научных работ в этом направлении, выполненный металловедомы, физиками и механиками. Отмечены работы по разработке моделей для таких материалов как на феноменологическом уровне, так и уровне механики микронеоднородных сред авторов: Бондарева Е.Н., Волкова С.Д., Дудукаленко В.В., Лихачева В.А., Сараева Л.А., Фрейдлина А.Б., Nikamichi N., Murakami Y. и многих других.

Анализируя поведение рассматриваемых в диссертации нелинейно-упругих деформаций и материалов с механической памятью формы, отметим некоторые (чисто внешние) аналогии на феноменологическом уровне.

Во-первых, и нелинейные упругие материалы (после выдержки под напряжением и ползучести) и материалы с памятью формы обладают эффектом механической памяти и полностью восстанавливают упругие характеристики

после разгрузки.

Во-вторых, диаграммы упругого деформирования $\sigma - e$ для тех и других материалов имеют «гистерезисные» петли с горизонтальными площадками, но для нелинейно-упругих материалов упругая деформация на площадке развивается во времени вследствие ползучести, а для материалов с механической формой памяти — «мгновенно», в результате фазовых превращений и аномального изменения упругих констант в фазах.

В-третьих, для тех и других материалов описать указанные гистерезисные формы кривых упругого деформирования $\sigma - e$ на феноменологическом уровне (не прибегая к анализу микроструктуры) крайне сложно.

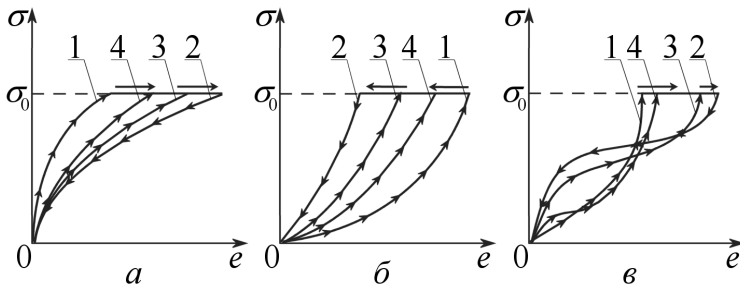


Рис. 6. Спектр схематических диаграмм упругого деформирования $e - \sigma$ в условиях ползучести: 1 — $t = 0 + 0$; 2 — $t = t^*$; 3 — $t = t_1$; 4 — $t = t_2$; (t^* — время разгрузки, $t_2 > t_1 > t^*$).

отмеченных сложных явлений является эволюция структурных деформаций и соответствующих им структурных напряжений в материале под действием внешних нагрузок.

Таким образом, выполненный анализ в определенной мере по некоторым признакам позволил объединить нелинейно-упругие материалы в условиях ползучести и материалы с памятью формы в одну группу.

В пункте 3.6 предложена феноменологическая реологическая модель нелинейно-упругого материала в пределах первой и второй стадий ползучести, отражающая влияние ползучести на упругую деформацию, которая является обобщением модели Ю.П. Самарина и имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon &= e + p, & p &= u + v + w, \\
 u(t) &= \sum_k u_k(t), & \dot{u}_k(t) &= \lambda_k \left[a_k (\sigma_0)^{l_1} - u_k(t) \right], \\
 v(t) &= \sum_k v_k(t), & \dot{v}_k(t) &= \begin{cases} \lambda_k \left[b_k (\sigma_0)^{l_2} - v_k(t) \right], & b_k (\sigma_0)^{l_2} > v_k, \\ 0, & b_k (\sigma_0)^{l_2} \leq v_k, \end{cases} \\
 \dot{w}(t) &= c(\sigma_0)^m, \\
 e &= \frac{(\sigma_0)^n}{E(1 + \alpha_e u)},
 \end{aligned} \tag{10}$$

где ε , e , p — полная, упругая деформации и деформация ползучести; u , v , w — вязкоупругая, вязкопластическая и вязкая компоненты p ; c , λ_k , a_k , b_k , l_1 , l_2 , n , E , α_e — константы материала; σ_0 — напряжение.

Разработана методика идентификации параметров модели (10) и выполнена проверка ее адекватности экспериментальным данным по ползучести костной ткани. Результаты расчетов по модели (10) приведены на рис. 4 и 5 и в таблице.

Глава 4. Ползучесть элементов конструкций из нелинейно-упругого материала.

Глава 4 посвящена разработке методов расчета элементов конструкций из нелинейно-упругого материала в условиях ползучести.

В **пункте 4.1** изложены постановки задач главы 4.

В **пункте 4.2** исследовано влияние ползучести на величину упругой деформации стержневых систем и балок на основе феноменологических уравнений для материала. Доказан ряд теорем, согласно которым поведение конструкций как целого в обобщенных координат аналогично поведению одноосного образца, т.е. если материал конструкции подчиняется нелинейной теории упругости, то наблюдается плавный дрейф обобщенной упругой компоненты деформации конструкции как целого за счет деформации ползучести. Детально проанализирован этот эффект в зависимости от реологических параметров модели материала.

В **пункте 4.3** исследована ползучесть элементов конструкции из нелинейно-упругих материалов в условиях ползучести на основании структурной модели среды. Разработаны методики расчета, выполнен обстоятельный вариативный численный анализ поставленных задач.

В качестве прикладной задачи с использованием структурной модели решена краевая задача ползучести большеберцовой кости человека на основе ее моделирования стержнем трубчатого переменного сечения для физиологических уровней напряжения. Показано, что даже для малых уровней напряжений остаточные деформации ползучести в большеберцовой кости за сутки сравнимы с упругими деформациями. Отмечается, что построенные модели и полученные результаты помогут медикам при лечении переломов и искривлений костей, позволят им подобрать оптимальный аутооттрансплантат, обеспечивающий успешную реконструкцию пораженной кости, а также помогут инженерам в разработке новых перспективных материалов, работающих в условиях длительных нагрузок.

Основные результаты диссертационной работы

1. Разработана структурно-феноменологическая модель микронеоднородного нелинейно-упругого материала в условиях ползучести и выполнен детальный анализ ее внутренних математических свойств.

2. Доказано, что кривые ползучести по структурной модели при нагрузке могут иметь разный характер «выпуклости–вогнутости» (включая точки перегиба), а кривые обратной ползучести после полной разгрузки имеют немонотонный характер при нелинейных законах вязкого течения элементов модели и монотонно убывающий — при линейных законах.

3. Выполнена классификация материалов, обладающих эффектом влияния

деформации ползучести на упругую деформацию и показано, что этот эффект возможен лишь для физически нелинейно-упругих материалов.

4. Установлено, что вследствие ползучести нелинейно-упругая деформация проявляет одновременно свойства механической памяти, поскольку в процессе ползучести при разгрузке образца происходит полное восстановление первоначальных упругих свойств, а также вязкоупругости, так как мгновенно-упругая деформация явно зависит от времени. Показано, что при деформировании образца из нелинейно-упругого материала в режиме ползучести с выдержками при постоянных напряжениях наблюдаются специфические «гистерезисные» петли на диаграмме упругого деформирования.

5. Предложен феноменологический вариант кинетических уравнений ползучести, описывающий эффект влияния реологической деформации на мгновенно-упругую деформацию.

6. Решен ряд прикладных задач на основании структурной модели для элементов конструкций из нелинейно-упругого материала в условиях ползучести (включая «конструкции» из природного биокompозитного материала — костной ткани).

Основные результаты диссертации, опубликованные в рецензируемых журналах:

1. Радченко В.П., Шапиевский Д.В. Анализ нелинейной обобщенной модели Максвелла // Вестник Самарск. госуд. техн. ун.–та. Серия: Физико-математические науки. Самара, 2005. № 38. С. 55–65. (авт. 6 с.).

2. Радченко В.П., Шапиевский Д.В. О дрейфе упругой деформации для нелинейно-упругих материалов вследствие ползучести // Вестник Самарск. госуд. техн. ун.–та. Серия: Физико-математические науки. Самара, 2006. № 43. С. 99–108. (авт. 5 с.).

В других сборниках:

3. Радченко В.П., Шапиевский Д.В. К построению реологической модели, учитывающей влияние ползучести на мгновенно-упругую деформацию // Обзорение прикладной и промышленной математики. 2007. Т. 14. Вып. 4. С. 746. (авт. 0,5 с.).

4. Радченко В.П., Шапиевский Д.В. Анализ особенностей поведения обобщенной нелинейной модели Максвелла // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды второй Всероссийской научной конференции. Ч. 1. Самара: СамГТУ, 2005. С. 253–255. (авт. 2 с.).

5. Радченко В.П., Шапиевский Д.В. О немонотонном характере кривых обратной ползучести для композиционных материалов // Механика микронеоднородных материалов и разрушение. Сборник тезисов докладов IV Всероссийского научного семинара памяти профессора С.Д. Волкова. Екатеринбург, 2006. С. 51. (авт. 0,5 с.).

6. Радченко В.П., Шапиевский Д.В. Нелинейные эффекты влияния ползучести на упругую деформацию в биокompозиционных материалах // Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций. Тезисы докладов Всероссийской конференции. Новосибирск, 2006. С. 104. (авт. 0,5 с.).

7. Радченко В.П., Шапиевский Д.В. Теоремы о разгрузке для реологических

нелинейно-упругих сред // Математика. Механика. Информатика. Тезисы докладов Всероссийской научной конференции. Челябинск, 2006. С. 112. (авт. 0,5 с.).

8. Шапиевский Д.В. Структурная модель ползучести нелинейно-упругого микронеоднородного материала // Международная молодежная научная конференция «XXXIII Гагаринские чтения». Тезисы докладов. Секция №3. Москва, 2007. С. 122–123.

9. Радченко В.П., Шапиевский Д.В. Анализ эффекта немонотонности кривых обратной ползучести // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды четвертой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч. 1. Самара: СамГТУ, 2007. С. 214–218. (авт. 3 с.).

10. Шапиевский Д.В. Вариант феноменологических уравнений ползучести нелинейно-упругого материала // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды четвертой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч. 1. Самара: СамГТУ, 2007. С. 271–276.

11. Радченко В.П., Шапиевский Д.В. Структурная модель ползучести нелинейно-упругой компактной костной ткани // XVIII сессия Международной школы по моделям механики сплошных сред. Тезисы докладов международной конференции. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. 2007. С. 93–94. (авт. 1 с.).

Подписано в печать 8 октября 2007 г.

Заказ №701. Тираж 100 экз.

Отпечатано на ризографе.

Самарский государственный технический университет.

Отдел типографии и оперативной полиграфии.

443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.