На правах рукописи

Яшагин Николай Сергеевич

Математическое моделирование и исследование осцилляционных явлений в системах с памятью на основе аппарата дробного интегро-дифференцирования

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Самара – 2011

Работа выполнена на кафедре «Прикладная математика и информатика» Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Самарский государственный технический университет».

Научный руководитель:	*доктор физико-математических наук,* *профессор Радченко Владимир Павлович*
Официальные оппоненты:	*доктор физико-математических наук,* *профессор Жданов Александр Иванович* *доктор физико-математических наук,* *профессор Пулькина Людмила Степановна*
Ведущая организация:	*ФГБОУ ВПО «Ульяновский государственный университет»*

Защита состоится 26 декабря 2011 г. в 13 часов на заседании диссертационного совета Д 212.215.05 при ФГБОУ ВПО «Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королева (национальный исследовательский университет)» (СГАУ), расположенном по адресу: г. Самара, 443086, Московское шоссе, 34.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке СГАУ.

Автореферат разослан 23 ноября 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
д.т.н., профессор Фурсов В. А.

Общая характеристика работы

Актуальность работы. Математическое моделирование динамических систем, наделённых свойствами наследственности (динамической памяти), приводит к дифференциальным или интегро-дифференциальным уравнениям, содержащим операторы дробного интегро-дифференцирования Римана–Лиувилля или их модификации и обобщения, например, производные Капуто, Вейля и другие. Свойство наследственности (памяти) присуще не только многим механическим системам (вязко-упругие среды), но и физическим, биологическим и другим системам. Дробно-дифференциальные модели находят своё применение в диффузионных процессах в различных средах; задачах теплопроводности, динамики турбулентной среды, статистической оптики, радиофизики, гидродинамики, динамическом хаосе, астрофизики, геологии, фрактальной космографии; при описании различного рода переходных процессов в энергетических системах, в электродинамике при моделировании процессов в проводниках и диэлектриках, в системах автоматического управления при использовании обобщённых пропорционально-интегрально-дифференциальных (ПИД) регуляторов и многих других областях науки. Одним из фундаментальных аспектов исследования различного рода явлений в сложных системах является необходимость учёта нелокальных эффектов по времени (эффект памяти), «физической» причиной которых является медленная релаксация корреляционных связей между элементами системы. Математической основой при моделировании такого рода явлений является аппарат дробного исчисления. В этом направлении возникли новые математические методы описания и моделирования нелокальных процессов и явлений фрактальной природы. В этой связи развитие математического аппарата интегро-дифференцирования дробного порядка (дробного исчисления) применительно к моделированию осцилляционных явлений в динамических системах с памятью, детальное исследование корректности постановок задач, разработка аналитических и численных методов решения, исследование устойчивости и погрешности решений, алгоритмизация вычислительных процессов — безусловно является актуальным направлением развития современного естествознания и математики.

Цель диссертационной работы состоит в математическом моделировании осцилляционных процессов на основе операторов дробного интегро-дифференцирования Римана—Лиувилля и разработке новых численных методов и специального программного обеспечения для их исследования.

Научная новизна полученных в диссертационной работе результатов заключается в следующем:

1) разработаны новые математические модели описания неклассических осцилляционных процессов в средах и системах с памятью в форме обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с операторами дробного интегро-дифференцирования Римана—Лиувилля, позволяющие обобщить классическую теорию гармонических колебаний;

2) предложены и теоретически обоснованы постановки начальных задач для дифференциальных уравнений второго порядка с дробными производными Римана—Лиувилля, доказаны корректность постановок и непрерывный переход к классическим задачам Коши для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений колебаний гармонического осциллятора; предложена методика решения начальных задач редукцией к интегральному уравнению Вольтéрры второго рода с ядром Абеля и последующей факторизацией интегрального оператора и получено достаточное условие факторизуемости задачи;

3) построен сходящийся численный метод квадратур для интегрального уравнения Вольтéрры второго рода с ядром Абеля, содержащего два интегральных оператора, к которому редуцируются начальные модельные задачи; установлены априорные оценки погрешности вычислений;

4) получены асимптотические формулы и интегральные представления для обобщения функции типа Миттаг—Леффлера на случай двух переменных на комплексной плоскости в удобном для алгоритмизации виде, позволяющие численно изучать поведение функции при произвольных значениях параметров.

5) создан пакет прикладных программ, позволяющий эффективно получать решения модельных начальных задач с дробными операторами интегро-дифференцирования, выполнять сравнительный анализ с решениями классических задач, обобщениями которых они являются, вычислять и визуализировать значения специальных функций, изучать свойства описываемых математических объектов.

Теоретическая и практическая значимость работы заключается в разработке и исследовании новых математических моделей, описывающих осцилляционные процессы в средах и системах с памятью в форме обыкновенных дифференциальных уравнений с операторами дробного интегро-дифференцирования Римана—Лиувилля, включающих как частный случай классическую теорию гармонических колебаний. В теоретическом плане новизна заключается в ряде новых корректных постановках начальных задач, методах их решений, исследовании сходимости предложенных численных методов и априорной оценке их погрешностей. В практическом плане разработанный пакет прикладных программ позволяет использовать полученные результаты, обеспечивая более полное математическое описание встречающихся неклассических процессов в средах и системах с памятью (вязко-упругие среды, переходные процессы в электродинамике, обобщённые ПИД-регуляторы в системах автоматического управления и др.). На разработанный программный комплекс получено свидетельство о регистрации электронного ресурса в Объединённом фонде электронных ресурсов «Наука и образование» (№ 17486 от 11.10.2011 г.) и в Федеральном государственном научном учреждении «Центр информационных технологий и систем органов исполнительной власти» (№ 50201151294 от 18.10.2011 г.). Результаты диссертационной работы частично внедрены в учебный процесс СамГТУ в лекционные курсы для специальности 010501.65 «Прикладная математика и информатика».

На защиту выносятся:

1. Математические модели осцилляционных процессов в средах и системах с памятью в форме обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с операторами дробного интегро-дифференцирования Римана–Лиувилля, позволяющие обобщить классическую теорию гармонических колебаний.

2. Доказательство корректности постановок и метод решения начальных задач для дифференциальных уравнений второго порядка с дробными производными Римана—Лиувилля на основе факторизации редуцированного интегрального уравнения Вольтéрры второго рода с ядром Абеля.

3. Численный метод решения редуцированного интегрального уравнения Вольтéрры второго рода с ядром Абеля, содержащего два и более интегральных оператора, доказательство его сходимости и оценка погрешности решения.

4. Асимптотические формулы и интегральные представления для обобщения функции типа Миттаг—Леффлера на случай двух переменных на всей комплексной плоскости в удобном для алгоритмизации виде, позволяющие численно изучать поведение функций при произвольных значениях параметров.

5. Пакет прикладных программ, позволяющий эффективно получать численные решения модельных начальных задач с дробными операторами интегро-дифференцирования; вычислять и визуализировать значения специальных функций, связанных с функцией типа Миттаг-Леффлера, и изучать свойства описываемых математических объектов.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на 5-й Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (г. Самара, 2008 г.), Международной конференции по математической физике и её приложениям (г. Самара, 2008 г.), 6-й Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (г. Самара, 2009 г.), Всероссийской конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» (г. Самара, 2009 г.), 13-й Международной научной конференции имени академика М. Кравчука (г. Киев, 2010 г.), Международном Российско—Болгарском симпозиуме «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики» (г. Нальчик, 2010 г.), 2-й Международной конференции «Математическая физика и её приложения» (г. Самара, 2010 г.), 5-ом Международном форуме (10-й Международной конференции) молодых учёных «Актуальные проблемы современной науки» (г. Самара, 2010 г.), 2-ом Международном Российско-Казахском симпозиуме «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики» (г. Нальчик, 2011 г.), 9-й Школе молодых учёных «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики» (г. Нальчик, 2011 г.), Всероссийской конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения» (г. Самара, 2011 г.), 5-й Международной научной школе-семинаре «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» имени Е. В. Воскресенского (г. Саранск, 2011 г.), 8-й Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (г. Самара, 2011 г.), научном семинаре «Прикладная математика и механика» Самарского государственного технического университета (руководитель профессор Радченко В. П., 2009–2011 гг.).

Работа выполнялась в рамках тематического плана НИР СамГТУ (тема «Разработка методов математического моделирования динамики и деградации процессов в механике сплошных сред, технических, экономических, биологических и социальных системах и методов решения неклассических краевых задач и их приложений») и при частичной поддержке гранта РФФИ (проект № 10.01.00644-а).

Обоснованность выносимых на защиту научных положений, выводов и рекомендаций, а также достоверность полученных результатов исследований подтверждается:

- корректностью вводимых математических гипотез и допущений, использующихся при постановках задач и их решениях, строгостью в использовании математического аппарата и применении апробированных программных систем;

- сравнением численных и аналитических решений рассматриваемых начальных задач с известными результатами в частных случаях;

- преемственностью полученных новых теоретических и практических результатов с известными сведениями, когда существующие классические результаты являются частным случаем предложенных методов и моделей.

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 28 работ, из них 5 статей — в рецензируемых журналах из перечня ВАК, 13 статей — в сборниках трудов конференций и 10 тезисов докладов.

Благодарности. Автор выражает благодарность научному руководителю профессору Радченко В. П. за постоянное внимание к работе и доценту Огородникову Е. Н. за ряд постановок задач, консультации и поддержку работы.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Работы [4, 11, 14, 16, 18, 24] выполнены самостоятельно, в основных работах [1–3, 5] диссертанту принадлежит совместная постановка задач и ему лично принадлежат разработка методов решения, получение решений, алгоритмизация методов в виде программного комплекса, анализ результатов. В остальных работах [6–10, 12, 13, 15, 17, 19–23], опубликованных в соавторстве, автору диссертации в равной мере принадлежат постановки задач, а все результаты получены им лично.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, 6 глав, заключения, библиографии и 2 приложений. Общий объём диссертации 186 страниц, из них 163 страницы текста, включая 23 рисунка. Библиография включает 147 наименований на 19 страницах.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность и научная новизна диссертационной работы, сформулирована цель и аргументированы конкретные задачи исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения, приведена структура диссертационной работы, а также сведения об апробации работы и публикациях.

В первой главе проводится аналитический обзор и постановка задачи исследования. Изложено современное состояние проблемы математического моделирования с операторами дробного интегро-дифференцирования, основы которого заложены в работах Афанасьева В. В., Бегли Р. Л., Данилаева М. П., Килбаса А. А., Лучко Ю. Ф., Мейланова Р. П., Нахушева А. М., Нахушевой В. А., Овсянниковой Е. И., Огородникова Е. Н., Польского Ю. Е., Псху А. В., Репина О. А., Торвика П. Д., Учайкина В. В., Чадаева В. А., Шханукова–Лафишева М. Х., Diethelm K., Gorenflo R., Mainardi F., Podlubny I и многих других авторов.

По результатам обзора литературных источников, а также на основе анализа существующих математических моделей и постановок задач для описания осцилляционных явлений аргументированно сформулированы задачи диссертационной работы.

Во второй главе для математических моделей разработаны постановки начальных задач для дифференциальных уравнений второго порядка с дробными производными Римана—Лиувилля, доказана их корректность и приведён аналитический метод их решения при определённых ограничениях на параметры, а также показан непрерывный переход по параметру дробности к классическим задачам Коши для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений колебаний гармонического осциллятора.

В пункте 2.1 приведено определение и исследование свойств оператора дробного интегро-дифференцирования Римана—Лиувилля на конечном отрезке $[a, b]$ $(-\infty < a < b < +\infty)$:

$$I_{at}^{\alpha} f \equiv D_{at}^{-\alpha} f = \left[\begin{array}{ll} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_a^t \frac{f(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}}, & \alpha > 0, \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^n I_{at}^{n+\alpha} f \equiv \left(\frac{d}{dt}\right)^n D_{at}^{-(n+\alpha)} f, & \alpha \leq 0, \end{array} \right.$$

где $n = [-\alpha] + 1$ ($[\alpha]$ — целая часть числа $\alpha \in \mathbb{R}$), $f(t) \in L(a, b)$ — некоторая измеримая по Лебегу функция с областью определения $D(f) \subset [a, b]$, $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера.

Там же описана связь оператора с интегральным уравнением Вольтéрры второго рода с ядром Абеля и выписаны свойства получаемого при решении таких уравнений резольвентного оператора

$$E_{at;\lambda}^{\mu,\alpha} f = \int\limits_a^t (t-\tau)^{\mu-1} \mathrm{E}_{\alpha} \left[\lambda(t-\tau)^{\alpha}; \mu\right] f(\tau) d\tau, \tag{1}$$

где $\mu,\ \alpha > 0,\ \lambda \in \mathbb{C}$, а $\mathrm{E}_\alpha(z;\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\mu)}$ — функция типа Миттаг—Леффлера. Оператор (1) активно используется при аналитическом решении модельных уравнений.

В пункте 2.2 для обобщённого модельного дифференциального уравнения

$$\ddot{u} + \sum_{k=1}^{n} a_k D_{0t}^{\alpha_k} \dot{u} + \sum_{k=1}^{m} b_k D_{0t}^{\beta_k} u = f(t),$$

где $\alpha_k \in (0,1),\ \beta_k \in [0,2)$, приведена постановка начальной задачи, доказана теорема о существовании и единственности решения этой задачи, а также теорема об эквивалентности редукции к интегральному уравнению Вольте́рры второго рода с ядром Абеля.

Теорема 1. *Пусть $\alpha_k,\ \gamma_k \in [0,1),\ \beta_k \in (0,1);\ a_k,\ b_k,\ c_k \in \mathbb{R},\ f(t) \in L(0,T)$. Решение начальной задачи (задачи Коши или задачи типа Коши) для дифференциального уравнения*

$$\ddot{u} + \sum_{k=1}^{n} a_k D_{0t}^{\alpha_k} \dot{u} + \sum_{k=1}^{m} b_k D_{0t}^{1+\beta_k} u + \sum_{k=1}^{l} c_k D_{0t}^{\gamma_k} u = f(t) \tag{2}$$

с начальными условиями

$$u(0) = u_0, \quad \lim_{t \to 0+} \left[\dot{u}(t) + \sum_{k=1}^{m} b_k D_{0t}^{\beta_k} u \right] = u_1 \tag{3}$$

существует и единственно (в общем случае) в классе функций $u(t) \in C[0,T] \cap C^2(0,T]$; при $b_k \equiv 0\,(k = 1,2,\ldots,m)$, в классе функций $u(t) \in C^1[0,T] \cap C^2(0,T]$, при этом сама задача эквивалентна интегральному уравнению

$$I + \sum_{k=1}^{n} a_k I_{0t}^{1-\alpha_k} u + \sum_{k=1}^{m} b_k D_{0t}^{1-\beta_k} u + \sum_{k=1}^{l} c_k D_{0t}^{2-\gamma_k} u =$$

$$= I_{0t}^{2} f + u_0 + u_1 t + u_0 \sum_{k=1}^{m} b_k \frac{t^{1-\beta_k}}{\Gamma(1-\beta_k)}$$

при $t \in (0,T]$, где I — тождественный оператор.

Там же записаны два частных случая начальной задачи (2), (3), наиболее полно отражающие качественные характеристики обобщённой модели:

Задача 1. *Найти решение уравнения*

$$\ddot{u} + pD_{0t}^{\alpha} \dot{u} + qD_{0t}^{\beta} u = f(t), \tag{4}$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0. \tag{5}$$

Задача 2. *Найти решение уравнения*

$$\ddot{u} + pD_{0t}^{1+\alpha}u + qD_{0t}^{\beta}u = f(t), \tag{6}$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$u(0) = u_0, \quad \lim_{t\to 0+}[\dot{u}(t) + pD_{0t}^{\alpha}u] = u_1, \tag{7}$$

Здесь $p,\ q \in \mathbb{R},\ \alpha,\ \beta \in (0,1),\ f(t) \in L(0,T)$.

Показана редукция двух задач к унифицированному интегральному уравнению

$$u(t) + pI_{0t}^{1-\alpha}u + qI_{0t}^{2-\beta}u = F(t), \tag{8}$$

где для **задачи 1**:

$$F(t) = I_{0t}^{2}f + u_0 + \dot{u}_0 t + p\frac{u_0}{\Gamma(2-\alpha)}t^{1-\alpha},$$

а для **задачи 2**:

$$F(t) = I_{0t}^{2}f + u_0 + u_1 t.$$

В пункте 2.3 описана методика построения точных решений интегральных уравнений Вольте́рры второго рода с ядром Абеля, основанная на факторизации (разложении на множители) интегрального оператора. Приведены достаточные условия факторизуемости интегрального уравнения. Методика и достаточное условие, сформулированные для общего случая интегрального уравнения

$$u(t) + \sum_{k=1}^{n} a_k I_{0t}^{\alpha_k}u = f(t), \tag{9}$$

применены к уравнению (8), которое при $\beta = 2\alpha$ допускает факторизацию вида:

$$\left(I - \lambda_1 I_{0t}^{1-\alpha}\right)\left(I - \lambda_2 I_{0t}^{1-\alpha}\right)u = F(t),$$

где λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Решая последовательно систему интегральных уравнений

$$\left(I - \lambda_1 I_{0t}^{1-\alpha}\right)v = F(t), \quad \left(I - \lambda_2 I_{0t}^{1-\alpha}\right)u = v(t),$$

получим выражение для $u(t)$ в терминах оператора (1) и функции типа Миттаг—Леффлера.

В пункте 2.4 доказана непрерывная зависимость решений начальных **задач 1** и **2** от параметра дробности α ($\beta = 2\alpha$). Из этого и доказательства существования и единственности следует корректность этих начальных задач, и становится очевидным переход от обобщённой модели к классической модели гармонического осциллятора: $\ddot{u} + p\dot{u} + qu = f(t)$.

В пункте 2.5 приведены выводы по главе.

В третьей главе проведен анализ собственных колебаний моделей, колебаний под действием различных возмущающих нагрузок и анализ свойств отдельных частных случаев.

В пункте 3.1 приведены решения для **задачи 1** и **задачи 2**, в случае когда модельные уравнения допускают факторизацию ($\beta = 2\alpha$), в терминах некоторых специальных функций, связанных с функцией типа Миттаг–Леффлера. В частности, для **задачи 1**:

$$u(t) = u_0 \left[-\frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \mathrm{Exp}(1-\alpha, 1; \lambda_1, t) + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \mathrm{Exp}(1-\alpha, 1; \lambda_2, t) \right] +$$

$$+ \dot{u}_0 \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \mathrm{Exp}(1-\alpha, 2; \lambda_1, t) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \mathrm{Exp}(1-\alpha, 2; \lambda_2, t) \right],$$

где $\mathrm{Exp}(\alpha, \mu; \lambda; t) = t^{\mu-1} \mathrm{E}_\alpha (\lambda t^\alpha; \mu)$.

Решения проанализированы при различных характеристических значениях λ_1 и λ_2. В качестве примера на рис. 1 показано графическое представление решения при чисто мнимых значениях λ_1 и λ_2 в зависимости от параметра дробности α. Колебания для чисто мнимых корней в отличии от классического случая ($\alpha = 0$) носят затухающий характер, асимптотически приближаясь к нулю. Причём, чем больше параметр дробности α, тем решение медленнее стремится к нулю.

В пункте 3.2 получены общие решения для возмущённых задач. В частности, рассмотрен случай синусоидального возмущения, для которого получены формулы вычисления амплитуды и частоты колебаний:

$$A(t) = \frac{H}{\lambda_1 - \lambda_2} \sqrt{a^2(t) + b^2(t)}, \quad \varphi(t) = \mathrm{arctg}\, \frac{b(t)}{a(t)},$$

где

$$a(t) = \int_0^t \left[\lambda_1 \mathrm{Exp}(1-\alpha, 2; \lambda_1, \tau) - \lambda_2 \mathrm{Exp}(1-\alpha, 2; \lambda_2, \tau) \right] \cos \omega_0 \tau \, d\tau,$$

$$b(t) = \int_0^t \left[\lambda_1 \mathrm{Exp}(1-\alpha, 2; \lambda_1, \tau) - \lambda_2 \mathrm{Exp}(1-\alpha, 2; \lambda_2, \tau) \right] \sin \omega_0 \tau \, d\tau.$$

С учётом этого решение $u(t)$ и производная от него представляются в следующем виде:

$$\begin{cases} u(t) = A(t) \sin[\omega_0 t - \varphi(t)], \\ \dot{u}(t) = \omega_0 A(t) \cos[\omega_0 t - \varphi(t)]. \end{cases}$$

Полученный результат интересен и указывает на уникальность рассматриваемой системы. Исключительность модели заключается в том, что при дифференцировании полученного решения для координаты $u(t)$, величина $\dot{u}(t)$ находится так, как если бы $A(t)$ и $\varphi(t)$ были бы константами.

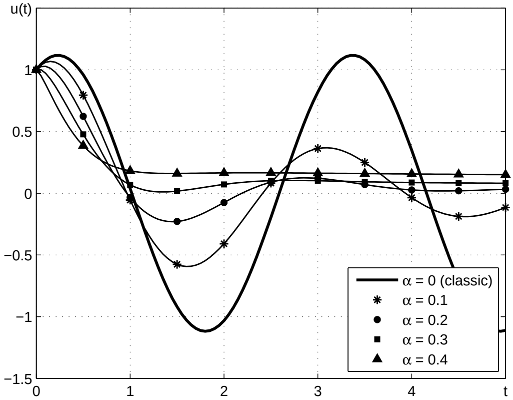

Рис. 1: Графики решений задачи 1 с параметрами $u_0 = 1$, $\dot{u}_0 = 1$, $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$

В пункте 3.3 рассмотрен отдельный частный случай обобщённого модельного уравнения, содержащий «спектральный член» (член вида $b_0 u$, $b_0 \in \mathbb{R}$):

$$\ddot{u} + \sum_{k=1}^{n} a_k D_{0t}^{\alpha_k} \dot{u} + \sum_{s=1}^{m} b_s D_{0t}^{\beta_s} u + b_0 u = f(t), \tag{10}$$

где α_k, $\beta_s \in (0,1)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $s = 1, 2, \ldots, m$. Для (10) решена начальная задача и доказаны существование и единственность такого решения. Рассмотрены всевозможные простейшие модели, для которых можно получить аналитические решения, при помощи которых, во-первых, моделируются рассматриваемые в диссертационной работе системы при наличии упругих связей, а, во-вторых, они используются для проверки адекватности численных методов решения в частных случаях.

В пункте 3.4 приведены выводы по главе.

Поскольку аналитические решения для **задачи 1** и **задачи 2** можно получить лишь в частном случае $\beta = 2\alpha$, то **в четвёртой главе** предложены два численных метода решения модельных задач для любых значений параметров α и β из области допустимых значений, а также приведён весь вспомогательный аппарат, необходимый для достижения этой цели.

В пункте 4.1 получены формулы численного интегрирования для дробного интеграла Римана—Лиувилля и интегрального оператора (1), являющиеся обобщениями классических формул «прямоугольников» и «трапеций». Приведены априорные оценки погрешности вычисления.

В частности, на разбиении $t_k = kh$ ($k = 0, 1, \ldots, n$, $t_0 = 0$, $t_n = t$, h— шаг разбиения) с учётом обозначения $u_k = u(t_k)$ «формула прямоугольников» и оценка погрешности для дробного интеграла, применённого к функции $u(t)$, выглядит следующим образом:

$$\underset{\text{пр}}{\overset{(1)}{}} I_{0t}^{\alpha} u = \frac{h^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \sum_{k=0}^{n-1} u_k \left[(n-k)^{\alpha} - (n-k-1)^{\alpha}\right] + o(h),$$

$$\left| I_{0t}^{\alpha} u - \underset{\text{пр}}{\overset{(1)}{}} I_{0t}^{\alpha} u \right| \leq \frac{M h t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)},$$

где $\underset{\text{пр}}{\overset{(1)}{}} I_{0t}^{\alpha} u$ — значение интеграла, вычисленного по «формуле прямоугольников», а для интегрального оператора (1) имеем

$$\underset{\text{пр}}{\overset{(1)}{}} E_{0t;\lambda}^{\alpha,\sigma} u = \sum_{k=0}^{n-1} u_k h^{\alpha} \left\{(n-k)^{\alpha} \mathrm{E}_{\sigma}\left[\lambda (n-k)^{\sigma} h^{\sigma}; \alpha+1\right] - \right.$$

$$\left. -(n-k-1)^{\alpha} \mathrm{E}_{\sigma}\left[\lambda (n-k-1)^{\sigma} h^{\sigma}; \alpha+1\right]\right\} + o(h), \tag{11}$$

$$\left| E_{0t;\lambda}^{\alpha,\sigma} - \underset{\text{пр}}{\overset{(1)}{}} E_{0t;\lambda}^{\alpha,\sigma} \right| \leq h t^{\alpha} M \mathrm{E}_{\sigma}(\lambda t^{\sigma}; \alpha+1),$$

где $\underset{\text{пр}}{\overset{(1)}{}} E_{0t;\lambda}^{\alpha,\sigma} u$ — значение, вычисленное по «формуле прямоугольников» для интегрального оператора (1), M — константа, независящая от h, в частности, $M = \max\limits_{\xi \in [0,t]} |\dot{u}(\xi)|$ при $u(t) \in C^1[0,T]$. При устремлении параметра дробности α к единице при $\lambda = 0$ описанные формулы переходят в классические формулы численного интегрирования.

В пункте 4.2 описан численный метод решения интегрального уравнения Вольте́рры (9), который базируется на предложенной выше идее факторизации с заменой в интегральном уравнении (в общем случае) иррациональных показателей α_k «ближайшими» рациональными числами. В результате решение записывается в форме

$$u(t) = F(t) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i^m}{\prod\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{m} (\lambda_i - \lambda_k)} E_{0t;\lambda_i}^{\varepsilon,\varepsilon} F,$$

где λ_i — корни характеристического уравнения, а оператор $E_{0t;\lambda_i}^{\varepsilon,\varepsilon} F$ вычисляется при помощи разработанных в пункте 4.1 формул, к примеру, с помощью (11).

В пункте 4.3 разработан численный метод решения слабосингулярного интегрального уравнения (8) на равномерной сетке. С помощью замены переменных

$$u(t) = v(t) - p E_{0t;-p}^{1-\alpha,1-\alpha} v, \tag{12}$$

где $u(t)$ является результатом решения интегрального уравнения

$$v(t) = u(t) + p I_{0t}^{1-\alpha} u,$$

осуществляется переход к несингулярному интегральному уравнению

$$v(t) + qI_{0t}^{2-\beta}v - pqE_{0t;-p}^{3-\alpha-\beta,1-\alpha}v = F(t). \tag{13}$$

Для (13) на разбиении $t_k = kh$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ конечного отрезка $[0, T]$, с учётом обозначений для точного $v(t_k) = v_k$ и приближённого $\tilde{v}(t_k) = \tilde{v}_k$ решений и функции правой части $F(t_k) = F_k$, имеем итерационную формулу для дискретного представления решения:

$$\tilde{v}_j = \frac{F_j - ph^{2-\beta}\sum\limits_{k=0}^{j-1} c_{jk}^{(2-\beta)}\tilde{v}_k + pqh^{3-\alpha-\beta}\sum\limits_{k=0}^{j-1} c_{jk}^{(3-\alpha-\beta,1-\alpha)}\tilde{v}_k}{1 + ph^{2-\beta}c_{jj}^{(2-\beta)} - pqh^{3-\alpha-\beta}c_{jj}^{(3-\alpha-\beta,1-\alpha)}}, \tag{14}$$

где $j = 1, 2, \ldots, n$, $c_{ij}^{(\alpha)}$ и $c_{ij}^{(\alpha,\beta)}$ — коэффициенты формул численного интегрирования для интегральных операторов. Доказана сходимость построенной процедуры и получена априорная оценка погрешности метода.

Теорема 2. *При выполнении условия*

$$\left| ph^{2-\beta}c_{ii}^{(2-\beta)} - pqh^{3-\alpha-\beta}c_{ii}^{(3-\alpha-\beta,1-\alpha)} \right| \le C < 1$$

приближённое решение (14) *сходится к точному решению интегрального уравнения* (8), *а априорная оценка погрешности вычисления приближённого решения в точке* $t = t_i$ *имеет вид*

$$|v_j - \tilde{v}_j| \le \frac{A}{1-C}h^s\left(1 + \frac{B}{1-C}h^{2-\beta}\right)^{j-1},$$

где A, B, C *— некоторые заданные постоянные величины, а* s *— порядок точности применяемой формулы численного интегрирования.*

Искомое приближённое решение интегрального уравнения (8) вычисляется по формуле (12) с использованием любой из квадратурных формул, например (11).

В пункте 4.4 приведены выводы по главе.

В пятой главе даны определения и описаны свойства функции типа Миттаг—Леффлера и связанных с ней специальных функций, в том числе, разработан аппарат для изучения их асимптотического поведения, поскольку вычисление значений специальных функций при больших значениях аргументов приводит к существенным вычислительным трудностям.

В пункте 5.1 дан обзор специальных функций, связанных с функцией типа Миттаг—Леффлера, кратко описаны основные её свойства и связь с другими известными функциями.

В пункте 5.2 приведены определения и основные свойства для функций, являющихся фундаментальными решениями модельных задач и обобщающих классические функции:

1) аналог экспоненты: $\mathrm{Exp}(\alpha, \mu; \lambda; x) = t^{\mu-1}\mathrm{E}_\alpha(\lambda x^\alpha; \mu)$;

2) аналог синуса: $\mathrm{Expc}(\alpha,\mu;\lambda;x) = \frac{x^{\mu-1}}{2}\left[\mathrm{E}_\alpha(\lambda x^\alpha;\mu) + \mathrm{E}_\alpha\left(\overline{\lambda x^\alpha};\mu\right)\right]$;
3) аналог косинуса: $\mathrm{Exps}(\alpha,\mu;\lambda;x) = \frac{x^{\mu-1}}{2i}\left[\mathrm{E}_\alpha(\lambda x^\alpha;\mu) - \mathrm{E}_\alpha\left(\overline{\lambda x^\alpha};\mu\right)\right]$.

В пункте 5.3 разработаны свойства функции, обобщающей функцию типа Миттаг—Леффлера на случай n переменных:

$$\mathrm{E}_{\bar{\alpha}}(z;\mu) = \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_n=0}^{\infty} \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} z_i^{k_i}}{\Gamma\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i k_i + \mu\right)},$$

где $\bar{\alpha} = (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ — мультииндекс, $z = (z_1,z_2,\ldots,z_n)$ — вектор переменных, параметры $\mu,\alpha_i \in \mathbb{C}$, причём $\mathrm{Re}\alpha_i > 0$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Для случая двух переменных

$$\mathrm{E}_{\alpha,\beta}(x,y;\mu) = \sum_{k,n=0}^{\infty} \frac{x^k y^n}{\Gamma(\alpha k + \beta n + \mu)} \tag{15}$$

доказаны теоремы, определяющие асимптотические свойства функции для больших по модулю значений аргументов $|x|$ и $|y|$ при различных ограничениях на аргументы комплексных x и y. Например, для $|\arg x| \le a/\beta$ и $|\arg y| \le a/\alpha$, где a — любое вещественное число, удовлетворяющее условию

$$\frac{\pi\alpha\beta}{2} < a \le \min\{\pi,\pi\alpha\beta\}, \tag{16}$$

справедлива теорема.

Теорема 3. *Пусть $\alpha,\ \beta \in (0,2)$, $\alpha\beta < 2$, μ — любое комплексное число. Тогда для любых целых $p_x,\ p_y \ge 1$ при $|x| \to \infty$ и $|y| \to \infty$ справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$\mathrm{E}_{\alpha,\beta}(x,y;\mu) = \frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{e}^{x^{1/\alpha}} x^{\frac{1+\beta-\mu}{\alpha}}}{x^{\beta/\alpha} - y} + \frac{1}{\beta}\frac{e^{y^{1/\beta}} y^{\frac{1+\alpha-\mu}{\beta}}}{y^{\alpha/\beta} - x} +$$

$$+\sum_{k=1}^{p_x}\sum_{l=1}^{p_y} \frac{x^{-k}y^{-l}}{\Gamma(\mu - k\alpha - l\beta)} + o\left(|x|^{-1-p_x}|y|^{-1-p_y}\right).$$

Доказаны ещё три теоремы для других ограничений на аргументы.

Исследовано асимптотическое поведение функции (15) для случая, когда один из аргументов (для определённости x) ограничен по модулю, а модуль другого достаточно большой. Результаты исследований сформулированы в виде теорем. Теорема для случая $|x| \ge R$, $|\arg x| \le a/\beta$ и $|\arg y| \le a/\alpha$, где a — любое вещественное число, удовлетворяющее условию (16), а $R > 0$ — некоторое действительное число, приведена ниже.

Теорема 4. *Пусть $\alpha, \beta \in (0,2)$, $\alpha\beta < 2$, μ — любое комплексное число. Тогда для любых целых $p \geq 1$ при $|y| \to \infty$ и ограниченном $|x|$ справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$\mathrm{E}_{\alpha,\beta}\left(x, y; \mu\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{e^{x^{1/\alpha}} x^{\frac{1+\beta-\mu}{\alpha}}}{x^{\beta/\alpha} - y} + \frac{1}{\beta}\frac{e^{y^{1/\beta}} y^{\frac{1+\alpha-\mu}{\beta}}}{y^{\alpha/\beta} - x} +$$

$$+\frac{1}{x}\sum_{l=1}^{p}\frac{y^{-l}}{\Gamma\left(\mu - \alpha - l\beta\right)} + o\left(|y|^{-p-1}\right).$$

Доказаны ещё 4 теоремы для других ограничений на аргументы.

В пункте 5.4 приведены выводы по главе.

В шестой главе описывается программный комплекс «MitLef», созданный на основе результатов, полученных автором диссертации. Программный комплекс предназначен для решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с дробными производными Римана—Лиувилля и изучения свойств специальных функций, связанных с функцией типа Миттаг—Леффлера.

В пункте 6.1 содержится подробное описание интерфейса программы, назначения разных пунктов меню и приведена блок-схема программного комплекса «MitLef» (см. рис. 2), которая наглядно демонстрирует алгоритм обработки данных и производимых вычислений.

В пункте 6.2 описывается та часть программного комплекса, которая предназначена для вычисления значений и анализа поведения следующих специальных функций: функция типа Миттаг—Леффлера, обобщённая экспонента, обобщённый синус, обобщённый косинус, обобщение функции типа Миттаг—Леффлера на случай двух переменных.

В пункте 6.3 описывается та часть программного комплекса, которая предназначена для вычисления интегральных операторов по квадратурным формулам. Данная часть является вспомогательной, поскольку на её основе строятся алгоритмы для построения численных решений модельных начальных задач.

В пункте 6.4 описывается та часть программного комплекса, которая предназначена для построения решений начальных задач и их анализа, в том числе сравнительного для двух моделей (4), (5) и (6), (7) и их классического аналога.

В пункте 6.5 с помощью программного комплекса проведено исследование свойств модельных дифференциальных уравнений и специальных функций, с помощью которых строятся аналитические решения. Приведены многочисленные результаты соответствующих расчётов.

В пункте 6.6 приведены выводы по главе.

В Заключении перечислены основные результаты, полученные в диссертационной работе.

1. Предложены и исследованы новые математические модели описания осцилляционных процессов в средах и системах с памятью в форме обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с операторами дробного

Рис. 2: Блок-схема программного комплекса «MitLef»

интегро-дифференцирования Римана—Лиувилля, позволяющие обобщить классическую теорию гармонических колебаний.

2. Приведены новые постановки начальных задач для класса модельных обыкновенных дифференциальных уравнений с дробными производными Римана—Лиувилля. Сформулированы постановки для нового класса дифференциальных уравнений, содержащих объект типа $D_{0t}^{\alpha}u^{(n)}$ $(\alpha \in (0,1),\ n \in \mathbb{N})$. Доказаны существование, единственность решений и корректность постановок начальных задач.

3. Построены аналитические решения модельных начальных задач в терминах некоторых специальных функций, связанных с функцией типа Миттаг—Леффлера. Решения проанализированы при различных значениях корней характеристического уравнения. Сделаны выводы о характере колебательного процесса. Построены общие решения для возмущённых задач.

4. Получены формулы для вычисления интегралов с разностными ядрами и функцией типа Миттаг—Леффлера в ядре, являющиеся обобщением классических формул «прямоугольников» и «трапеций». Установлены априорные оценки погрешности вычисления значений дробного интеграла.

5. Разработан численно-аналитический метод решения интегрального уравнения Вольтéрры второго рода с ядром Абеля, к которому редуцируются начальные модельные задачи, основанный на идее факторизации интегрального оператора и квадратурных формулах вычисления интегралов с разностными ядрами и функцией типа Миттаг—Леффлера в ядре.

6. Предложен и реализован итерационный численный метод решения слабосингулярного интегрального уравнения Вольтéрры второго рода с ядром Абеля на равномерной сетке, основанный на переходе с помощью замены переменных к несингулярному уравнению. Доказана сходимость решения и получена априорная оценка погрешности решения данным численным методом.

7. Получены асимптотические и интегральные представления для обобщения функции типа Миттаг—Леффлера на случай двух переменных на всей комплексной плоскости в удобном для алгоритмизации виде, позволяющие численно изучать поведение функций при произвольных значениях параметров.

8. В среде Matlab создан программный комплекс «MitLef», предназначенный для решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с дробными операторами Римана—Лиувилля, моделирующих кинетику систем с памятью, и для изучения свойств специальных функций, связанных с функцией типа Миттаг—Леффлера. Проведено тестирование программного комплекса, показавшее его эффективность при выполнении указанных задач. Получено свидетельство о регистрации электронного ресурса по разработанному программному комплексу.

Список основных публикаций в рецензируемых журналах из перечня ВАК:

[1] Огородников Е. Н., Яшагин Н. С. Дробные математические модели вязкоупругого тела и проблемы параметрической идентификации // Обозрение прикладной и промышленной математики. Т. 14. 2007. С. 340–342.

[2] Огородников Е. Н., Яшагин Н. С. Некоторые специальные функции в решении задачи Коши для одного дробного осцилляционного уравнения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2009. № 1(18). С. 276–279.

[3] Огородников Е. Н., Яшагин Н. С. Постановка и решение задач типа Коши для дифференциальных уравнений второго порядка с дробными производными Римана–Лиувилля // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2010. № 1(20). С. 24–36.

[4] Яшагин Н. С. Интегральные представления и асимптотические формулы для обобщения функции типа Миттаг–Леффлера на случай двух переменных // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2010. № 5(21). С. 229–236.

[5] Огородников Е. Н., Радченко В. П., Яшагин Н. С. Реологические модели вязкоупругого тела с памятью и дифференциальные уравнения дробных осцилляторов // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. № 1(22). С. 255–268.

В других изданиях:

[6] Огородников Е. Н., Яшагин Н. С. Вынужденные колебания дробных осцилляторов // Матем. моделирование и краев. задачи. Труды пятой Всероссийской научной конференции с международным участием, Ч 1. Самара: СамГТУ, 2008. С. 215–221.

[7] Огородников Е. Н., Яшагин Н. С. О некоторых свойствах операторов с функциями типа Миттаг–Леффлера в ядрах // Матем. моделирование и краев. задачи. Труды шестой Всероссийской научной конференции с международным участием, Ч. 3. Самара: СамГТУ, 2009. С. 181–188.

[8] Радченко В. П., Огородников Е. Н., Яшагин Н. С. Математические модели вязко-упругого тела и вынужденные колебания дробных осцилляторов // Тринадцята Мiжнародна наукова конференцiя iменi академiка М. Кравчука: Матерiали конференiї, Ч. 1. Київ: 2010. С. 344–345.

[9] Огородников Е. Н., Яшагин Н. С. О постановке и решении начальных задач для дифференциальных уравнений второго порядка с младшими дробными производными // Тринадцята Мiжнародна наукова конференцiя iменi академiка М. Кравчука: Матерiали конференiї. Ч. 1. Київ: 2010. С. 297–298.

[10] Огородников Е. Н., Яшагин Н. С. Существование, единственность и структура решения задачи Коши для одного класса обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с дробными производными Римана–Лиувилля // Матем. моделирование и краев. задачи. Труды седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием, Ч. 3. Самара: СамГТУ, 2010. С. 225–232.

[11] Яшагин Н. С. Сравнительный анализ решений задач типа коши для двух модельных дифференциальных уравнений дробного осциллятора // Материалы Международного Российско-Болгарского симпозиума. Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики. Нальчик—Хабез: 2010. С. 273–274.

[12] Радченко В. П., Огородников Е. Н., Яшагин Н. С. Реологические модели вязко-упругого тела с памятью и дифференциальные уравнения дробных осцилляторов // Материалы второй междунар. конф. Мат. физика и её приложения. Самара: 2010. С. 253–255.

[13] Огородников Е. Н., Яшагин Н. С. Постановка и решение начально-краевых задач для дифференциальных уравнений с волновым оператором и младшими дробными производными Римана–Лиувилля // Материалы второй междунар. конф. Мат. физика и её приложения. Самара: 2010. С. 250–252.

[14] Яшагин Н. С. Решение задач типа Коши для дифференциального уравнения второго порядка с произвольным числом младших дробных производных путем факторизации интегрального оператора // Материалы второй междунар. конф. Мат. физика и её приложения. Самара: 2010. С. 348–349.

[15] Огородников Е. Н., Радченко В. П., Яшагин Н. С. Реологические модели вязко-упругого тела с памятью и дробные дифференциальные уравнения // Материалы Второго Международного Российско-Казахского симпозиума. Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики. Нальчик: 2011. С. 134–136.

[16] Яшагин Н. С. Методы решения одного модельного уравнения дробного осциллятора // Материалы IX Школы молодых учёных. Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики. Нальчик: 2011. С. 103–107.

[17] Огородников Е. Н., Яшагин Н. С. Методы решения начально-краевых задач для дифференциальных уравнений с волновым оператором и младшими дробными производными Римана—Лиувилля // Матем. моделирование и краев. задачи. Труды восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием, Ч. 3. Самара: СамГТУ, 2011. С. 140–145.

[18] Яшагин Н. С. Об одном приближенном методе решения начальных задач для дифференциальных уравнений с дробными производными Римана-Лиувилля // Матем. моделирование и краев. задачи. Труды восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием, Ч. 3. Самара: СамГТУ, 2011. С. 189–192.

[19] Огородников Е. Н., Яшагин Н. С. Анализ вынужденных колебаний дробных осцилляторов // Материалы междунар. конф. мат. физика и её приложения. Самара: 2008. С. 141–143.

[20] Огородников Е. Н., Яшагин Н. С. Об одной модели дробного осциллятора // Математическое моделирование физических, экономических, технических и социальных систем и процессов. Труды седьмой междунар. конфер. Ульяновск: 2009. С. 203–204.

[21] Огородников Е. Н., Яшагин Н. С. О некоторых специальных функциях и структуре решения задачи Коши для одного дробного осцилляционного уравнения // Материалы Международного Российско-Абхазского симпозиума. Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики. Нальчик: 2009. С. 215–218.

[22] Огородников Е. Н., Яшагин Н. С. О задаче Коши и структуре ее решения для обыкновенных дифференциальных уравнений с младшими дробными производными // Сам Диф-2009. Научная конференция «Дифференциальные уравнения и их приложения»: Тезисы докладов. Самара: 2009. С. 42–44.

[23] Яшагин Н. С., Огородников Е. Н. Об одном обобщении функции типа Миттаг–Леффлера, интегральном операторе с указанной функцией в ядре, их свойствах и приложениях // Актуальные проблемы современной науки. Труды 5–го Международного форума. Естественные науки. Ч. 1–3. Самара: СамГТУ, 2010. С. 261–267.

[24] Яшагин Н. С. Асимтотические формуля для решения дробного осцилляционного уравнения // Сам Диф-2011. Научная конференция «Дифференциальные уравнения и их приложения». Тезисы докладов. Самара: 2011. С. 140–141.

[25] Яшагин Н. С., Огородников Е. Н. Свидетельство о регистрации электронного ресурса «Автоматизированный исследовательский комплекс «MitLef» в ОФЭРНиО № 17486 от 11.10.2011 г и ФГНУ ЦИТиС № 50201151294 от 18.10.2011 г.

Подписано в печать 16.11.2011. Формат 60×84 1/16.
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л.1.
Тираж 100 экз. Заказ № 1108.
ФГБОУ ВПО «Самарский государственный технический университет»
Отдел типографии и оперативной печати
443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 244.